

Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Квітка Ніна Михайлівна

УДК 538.9

ДИСЕРТАЦІЯ

**ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ЗБУДЖЕНЬ
У ШАРУВАТИХ НАДПРОВІДНИКАХ, КЕРОВАНЕ
СТАТИЧНИМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ**

104 – «Фізика та астрономія»

10 – Природничі науки

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Н.М. Квітка.

Науковий керівник: Майзеліс Захар Олександрович,
доктор фізико-математичних наук, доцент

Харків – 2024

АНОТАЦІЯ

Квітка Н.М. Поширення електромагнітних збуджень у шаруватих надпровідниках, кероване статичним магнітним полем. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 104 – Фізика та астрономія (Галузь знань 10 – Природничі науки). — Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України, Харків, 2024.

В дисертаційній роботі представлено результати теоретичного дослідження поширення електромагнітних збуджень в зразку шаруватого надпровідника скінченних розмірів, кероване статичним магнітним полем.

Шаруваті надпровідники (ШНП), прикладом яких є добре відомі купратні високотемпературні надпровідники (ВТНП) або штучно синтезовані шаруваті структури, мають унікальні фізичні властивості, які пояснюються сильною анізотропією струму: надпровідні шари пов'язані між собою через внутрішній ефект Джозефсона, в якому величина струму нелінійно залежить від міжшарової різниці фаз параметра порядку, а вздовж шарів тече лондонівський надпровідний струм. У цих структурах передбачено низку цікавих нелінійних електромагнітних (ЕМ) явищ в важливому з точки зору застосувань терагерцовому (ТГц) діапазоні частот. Важливою особливістю шаруватих надпровідників є те, що електромагнітні хвилі в них взаємодіють зі статичним магнітним полем, що зумовлює необхідність теоретичних досліджень впливу такого поля на поширення хвиль, і, відповідно, на ефекти, які можна спостерігати в таких матеріалах. У першому розділі дисертації проаналізовано основні результати, наявні в літературі про шаруваті надпровідникові системи, описано основні підходи до аналізу їхніх електродинамічних властивостей, а також найважливіші ефекти, передбачені у таких системах.

В другому розділі дисертації розглянуто хвилі, локалізовані на

тонкій пластині ШНП, яка знаходиться в діелектричному середовищі (або, для простоти, у вакуумі) в двох природно найпростіших геометріях: надпровідні шари паралельні або перпендикулярні границі розділу ШНП-вакуум. Аналітично отримано закон дисперсії для власних мод — поверхневих та хвилевідних локалізованих хвиль (ЛХ) у двох вказаних випадках. Розглянуто симетричні та антисиметричні (щодо просторового розподілу магнітної компоненти ЕМ-хвилі відносно середини пластини) моди. За отриманими аналітичними виразами побудовано спектральні криві. У першому випадку, коли шари надпровідника паралельні поверхням зразка, дисперсія є нормальною з додатною груповою швидкістю за всіх частот, що не є дуже близькими до джозефсонівської частоти. Для цієї ж частотної області в обраній геометрії вперше враховано також ємнісний міжшаровий зв'язок — ефект порушення електронеутральності. Було показано, що в цьому випадку дисперсія може бути аномальною. Окрім того, цей ефект призводить і до інших не менш важливих цікавих наслідків: до виникнення поблизу джозефсонівської частоти додаткової забороненої зони, ширина якої асимптотично пропорційна квадратному кореню з коефіцієнта ємнісного зв'язку, та до виродження спектра при деяких параметрах системи. У другому ж випадку, коли шари надпровідника перпендикулярні поверхням зразка, ємнісним зв'язком можна знехтувати. При цьому спектральні криві мають аномальну частину в широкому діапазоні частот. Показано, як саме можна впливати на спектральні криві, варіюючи статичне магнітне поле: збільшення поля відповідає майже паралельному зсуву кривих до менших частот при частотах, більших джозефсонівської, та збільшенню кривини спектральної лінії при малих частотах. Для подальшого дослідження в наступних розділах було обрано другий варіант геометрії, в якій краще виявляються анізотропні властивості ШНП і можливо спостерігати аномальну дисперсію в більш широкому діапазоні частот. При цьому ємнісний зв'язок може

бути опущено, а забороненої зони не виникає в найцікавішій з точки зору вивчення нелінійних ефектів області частот.

У третьому розділі дисертації розглянуто збудження локалізованих хвиль, яке викликає явище резонансної прозорості зразка для ТГц хвиль, і вперше досліджується вплив статичного магнітного поля на це явище. Пластину поміщено в оптично щільне діелектричне середовище і відокремлено від нього з обох боків зразка значно менш оптично щільними тонкими просторовими проміжками (вакуумом). В описаній геометрії можливо збудження ЛХ, якщо на систему падає хвиля, яка, внаслідок ефекту повного внутрішнього відбиття, згасає у вакуумних проміжках, але завдяки збудженню ЛХ хвиля може пройти через систему. Це збудження власних мод пояснює резонансну прозорість пластин ШНП, що виникає при певних резонансних значеннях параметрів, які відповідають дисперсійним кривим ЛХ.

Задачу розв'язано аналітично в трансфер-матричному формалізмі. Цей метод було модифіковано для негармонічних функцій — адже в областях зразка, в які проникає статичне магнітне поле, ЕМ хвилі стають негармонічними. Зокрема, в такому випадку ці хвилі описано спеціальними функціями Лежандра. У термінах функцій Лежандра отримано аналітичні вирази для спеціальних матриць, які ефективно описують проходження ЕМ хвилі крізь область часткового проникнення у зразок джозефсонівського вихору, який зумовлено наявністю слабкого статичного поля. Показано, що компоненти цих матриць не містять інформації ні про розміри зразка (товщину), ні про тип діелектричного середовища, з яким межує пластина. При цьому вони залежать лише від обраного значення статичного магнітного поля. Запропоновано використання цих нових матриць для спрощеного аналізу проходження ЕМ хвилі через складніші системи, що містять одну чи більше різних пластин ШНП, що межують з обох боків з діелектриками, в яких наявне певне статичне магнітне поле.

Було отримано та проаналізовано явні вирази для коефіцієнтів відбиття й проходження хвиль. Досліджено вплив статичного поля на ці коефіцієнти та визначено можливість керування явищем резонансної прозорості, яке викликане збудженням ЛХ у пластині ШНП. Залежність коефіцієнта проходження чи відбиття від кута падіння, завдяки немонотонній дисперсії, може набувати специфічного вигляду, і цей вигляд залежить як від частоти, так і від величини статичного магнітного поля. Це може бути один нормальний гострий пік проходження (або, відповідно, гострий мінімум відбиття), який спостерігався б, якщо б замість пластини ШНП помістити в систему матеріал з монотонною нормальною дисперсією. Інший можливий вигляд резонансної кривої — це два піки, що пов'язано з формою дисперсійних кривих, а саме їхньою немонотонністю. Третя можливість — коли два піки «об'єднуються» в один широкий пік. Показано, що варіація статичного поля дозволяє ефективно керувати системою та отримувати всі ці варіанти залежностей. Більш того, це може бути значно зручніше для експериментального спостереження пропускання чи відбиття хвиль — адже у порівнянні зі зміною іншого параметра задачі, частоти, це не потребує настільки точного налаштування. А саме, зміна значення статичного магнітного поля на один відсоток приблизно еквівалентна (тобто приводить до подібного результату) зміні частоти на соті долі відсотка. А отже, це є простішим в реалізації.

У четвертому розділі дисертації вперше досліджено нелінійне фокусування лазерного пучка гауссового профілю, зумовлене його проходженням через пластину ШНП, кероване статичним магнітним полем. Теоретичний опис просторово обмеженого опромінювання ШНП може бути більш актуальним для сучасних експериментальних досліджень, ніж опис плоских ЕМ хвиль, на яких було сконцентровано увагу в попередніх розділах, і є доступною для аналізу математичною моделлю. Зокрема, отримано значення коефіцієнта пропускання для такої ТГц лінзи з ШНП

і показано, що він, при певних значеннях магнітного поля, є високим у порівнянні з іншими наявними матеріалами, що є важливим для практичних застосувань. Показано також, що статичне магнітне поле суттєво впливає на основні параметри фокусування лазерного пучка зразком ШНП, а отже його використання може бути запропоновано для гнучкого і, з експериментальної точки зору, нескладного керування нелінійним фокусуванням. Варіація статичного поля, як показано, дає широкий діапазон можливого впливу пластини ШНП, включаючи як фокусування, так і дефокусування. При цьому важливим моментом є те, що за відсутності статичного поля, ШНП може лише фокусувати терагерцовий пучок, тоді як варіація статичного поля дозволяє також спостерігати дефокусування, що розширює можливості використання таких терагерцових лінз. Крім того, області фокусування є періодичними по частоті (строго кажучи, по її відстройці від джозефсонівської частоти). Отримані за аналітичними формулами криві залежності фокусної відстані та мінімального радіусу лазерного пучка від статичного магнітного поля добре узгоджуються із симуляцією, проведеною для декількох обраних значень поля.

Практична значущість отриманих в дисертації результатів полягає в тому, що вони розширюють наявні фундаментальні теоретичні уявлення про особливості поширення ЕМ хвиль у ВТНП шаруватої структури. На основі отриманих результатів можливо створити нові прилади, що працюють у характерному для шаруватих ВТНП ТГц діапазоні частот, зокрема фільтри, змішувачі, підсилювачі. Сфера можливих застосувань таких приладів є дуже широкою: від медичної діагностики до астрономічних спостережень. Досліджена можливість використання статичного магнітного поля для налаштування параметрів ШНП дозволяє запропонувати це як ефективний метод керування роботою таких приладів в експериментальних установках.

Ключові слова: електромагнетизм, надпровідність, шаруваті на-

ноструктури, ефект Джозефсона, плазмоніка, метаматеріали, порушення електронейтральності, локалізовані хвилі, проходження та відбиття хвиль, нелінійне фокусування, твердотільні електронні пристрої.

ABSTRACT

Kvitka N.M. Propagation of electromagnetic excitations in layered superconductors controlled by a dc magnetic field. Qualification scholarly paper: a manuscript.

Thesis submitted for obtaining the Doctor of Philosophy in Natural Sciences, Speciality 104 – Physics and astronomy. – O.Ya.Usikov Institute for Radiophysics and Electronics, Kharkiv, 2024.

This thesis presents the results of a theoretical study of the propagation of electromagnetic excitations in layered superconducting samples of finite dimensions controlled by a DC magnetic field

Layered superconductors (LSCs), such as well-known curate high-temperature superconductors (HTS) or artificially fabricated layered structures, exhibit unique physical properties that are explained by a strong current anisotropy: the superconducting layers are interconnected through the internal Josephson effect, with the current magnitude depending on the interlayer order parameter phase difference, while a usual superconducting current runs along the layers. In these structures, a number of interesting nonlinear electromagnetic phenomena are predicted in the THz frequency range, that is important from the perspective of applications. Another important feature of layered superconductors is that electromagnetic waves in them interact with a DC magnetic field, which necessitates theoretical studies of the influence of the DC field on wave propagation and, consequently, on the effects that can be observed in such systems. The first chapter of the thesis analyzes the main results in the literature on layered superconducting systems, describes the main approaches to the analysis of their electrodynamic properties, and the most important effects predicted for such systems.

In the second chapter of the thesis, localized waves on a thin LSC plate embedded in a dielectric medium — for simplicity, a vacuum — are investigated for two the simplest natural geometries: superconducting layers

parallel to the LSC-vacuum interface and perpendicular to it. The dispersion law for the eigenmodes — surface and waveguide localized waves (LW) — in both geometries is obtained analytically. The symmetric and antisymmetric (regarding the spatial distribution of the magnetic component of the EM wave with respect to the middle of plate) modes are studied. Spectral curves are plotted using the obtained analytical expressions. In the first geometry, when the superconductor layers are parallel to the sample surfaces, the dispersion is normal and has a positive group speed at all frequencies that are not very close to the Josephson frequency. For exactly this frequency region, the capacitive interlayer coupling — the effect of electroneutrality breaking — in the chosen geometry was taken into account for the first time. It was shown that, in this case, the dispersion can be anomalous. In addition, this breaking leads to other no less important interesting consequences: an additional forbidden zone appears near the Josephson frequency, the width of which is asymptotically proportional to the square root of the capacitive coupling coefficient, and to the degeneration of the spectrum for some parameters. In the second geometry, when the superconductor layers are perpendicular to the sample surfaces, the capacitive coupling can be neglected. In this case, the spectral curves have anomalous parts in a wide frequency range. It is shown how the spectral curves can be influenced by varying the DC magnetic field: an increase in the static field corresponds to an almost parallel shift of the curves to lower frequencies at relatively high frequencies — greater than the Josephson frequency, and an increase in curvature — at low frequencies. For further study in the following chapters, the second geometry was chosen because it better reveals the anisotropic properties of the LSC and allows observing anomalous dispersion in a wider frequency range. The capacitive coupling can be omitted in this geometry, thus the forbidden zone does not appear in the most interesting (from the point of perspectives of further investigating nonlinear effects) frequency region.

In the third chapter of the thesis, the excitation of localized waves, which causes the phenomenon of resonant transparency of the LSC samples for THz waves, is studied, and the effect of a DC field on this phenomenon is investigated for the first time. The sample is placed in an optically dense dielectric medium and separated from it on both sides of the plate by much less optically dense thin spatial gaps (vacuum). In the described geometry, it is possible to excite the LWs using an incident wave which, due to the effect of total internal reflection, is attenuated in the vacuum gaps, but due to the LWs excitation, the wave can travel through the system. This excitation of the eigenmodes explains the resonant transparency of the LSC plate, which occurs at certain resonant values of the parameters that correspond to the dispersion curves for the LC.

The problem is solved analytically in the transfer-matrix formalism. This method was modified for nonharmonic functions, because EM waves become nonharmonic in the regions where the DC field penetrates the sample (in the case studied, these waves are described by special Legendre functions). In particular, special matrices that effectively describe the EM wave propagation when magnetic vortices partially penetrate the sample due to the presence of a weak DC field are found. The components of these matrices are explicitly derived and it was shown that they contain no information about the sample dimensions (thickness) or the type of dielectric medium with which the plate is bounded. At the same time, they depend solely on the chosen value of the DC magnetic field. The use of these new matrices is proposed for the simplified analysis of EM wave propagation through more complex systems containing one or more different LSC plates bordered on both sides by dielectrics with a certain DC magnetic field. Using these matrices, explicit expressions for the reflection and transmission coefficients were obtained and analyzed. The effect of the DC field on these parameters, and in particular, on the possibility of controlling the phenomenon of resonant transparency,

i.e., the complete wave transmission under resonant conditions, caused by excitation in the LH SCR plate, is studied. The dependence of transmission or reflection on the angle of incidence, due to non-monotonic dispersion, can have a specific form, and this form depends on both the frequency and the magnitude of the DC field. It can be a single normal sharp transmission peak (or, accordingly, a sharp reflection dip), which would be observed if a material with a normal monotonous dispersion was placed in the system instead of the LSC plate, or it can have two peaks, which is caused by the shape of the dispersion curves, namely, their nonmonotonicity, or, when these two peaks “merge” into one broad peak. It is shown that the variation of the DC field allows us to effectively control the system and obtain all these variants of dependencies, and moreover, it can be much more convenient for experimental observation of transmission or reflection, because (compared to changing another parameter of the problem, e.g., frequency) it does not require such a precise adjustment. Namely, a change in the value of the DC magnetic field by one percent is approximately equivalent (i.e., leads to a similar result) to a change in frequency by a hundredths of a percent. This makes it easier to implement.

In the fourth chapter of the thesis, for the first time, the nonlinear focusing of a Gaussian laser beam caused by its passage through a LSC plate controlled by a DC magnetic field is studied. The theoretical description of the spatially confined radiation in the LSC may be more relevant for modern experimental studies than the description of plane EM waves, on which the attention was focused in the previous chapters and which is an easily analyzable mathematical model. In particular, the transmission coefficient for such THz lens with LSCs is obtained and it is shown to be high at certain values of the magnetic field as compared to other available materials, and this is important for practical applications. It is also shown that the magnetic field significantly affects the main parameters of the laser beam focusing by the LSC sample, and

therefore its use can be proposed for flexible and, from the experimental point of view, simple control of nonlinear focusing. The variation of the magnetic field, as shown, gives qualitatively different results: focusing or defocusing, weak or strong focusing. An important aspect is that in the absence of a DC field, the LSC can only focus the terahertz beam, while the variation of the non-zero field also allows to observe defocusing, which expands the possibilities of use. In addition, the focusing regions at a non-zero field are periodic in frequency (strictly speaking, in its detuning from the Josephson frequency). The curves for the dependences of the focal length and focusing efficiency (the minimum radius of the laser beam normalized to its initial value) on the DC field obtained by analytical formulas are in good agreement with the simulation performed for several selected field values.

The practical significance of results obtained in the thesis is that they extend the existing fundamental theoretical understanding of the propagation of EM waves in HTSs of layered structure. Based on these results, it is possible to create new devices (in particular, filters, mixers, and amplifiers) operating in the THz frequency range characteristic for HTSCs of layered structure. The scope of possible applications of such devices is very wide: from medical diagnostics to astronomical observations. The investigated possibility of using a DC magnetic field to adjust the parameters of the HTSC allows us to propose it as an effective method for controlling the operation of such devices in experimental setups.

Keywords: electromagnetism, superconductivity, layered nanostructures, Josephson effect, plasmonics, metamaterials, electroneutrality breaking, localized waves, transmission and reflection, nonlinear focusing, solid-state electronic devices.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації у періодичних наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. N. **Kvitka**, S.S. Apostolov, N. M. Makarov, T. Rokhmanova, A. A. Shmat'ko, V.A. Yampol'skii Resonant transparency of a layered superconductor: Hyperbolic material in the terahertz range tuned by dc magnetic field. *Phys. Rev. B* 2021. Vol. 103. P. 104512. DOI: 10.1103/PhysRevB.103.104512 (Q1 (2021))
2. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, N. **Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized Josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys.* 2018. Vol. 44. P. 552–560. DOI: 10.1063/1.5037558 (Q3 (2018))

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації в інших періодичних наукових виданнях:

3. N. **Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov. Modification of transfer-matrix method for electromagnetic waves in layered superconductor in presence of dc magnetic field. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна. Серія «Фізика»*. 2019. Vol. 31. P. 42-47. DOI: 10.26565/2222-5617-2019-31-6 (Категорія Б (2019))

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. **N. Kvitka**, H.V. Ovcharenko, Z.A. Maizelis, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Laser beam focusing by layered superconductor tuned by DC magnetic field. *ArXiv*. 2024
5. **N. Kvitka**, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Effect of Charge-neutrality Breaking on Localized Terahertz Waves in a Plate of Layered Superconductor. *2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW)* (November 14 – 18). Ukraine, 2022, доповідь, приз за найкращу доповідь серед аспірантів та молодих вчених Р. 214-216.
6. **N. Kvitka**, S.S. Apostolov, T. Rokhmanova, V.A. Yampol'skii. Resonant Suppression of the THz Wave Reflection from a Plate of Layered Superconducting Metamaterial Tunable by DC Magnetic Field. *2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials)* (September 20-23). New York, USA, 2021, доповідь Р. 214-216.
7. **Н. Квітка**, С.С. Апостолов, Т. Рохманова. Резонансне пропускання ТГц-хвилі через шаруватий надпровідник, кероване зовнішнім магнітним полем постійного струму *2020 XX Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини* (Жовтень 15-16). Львів, Україна, доповідь, диплом з відзнакою Р. 27.
8. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Dispersion of THz Modes Localized on Layered Superconductor Controlled

by DC Magnetic Field. *2018 48th European Microwave Conference (EuMC)* (Sep. 25 - 27). Madrid, Spain, 2018 P. 1509-1512.

9. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Description of Localized Josephson Plasma Waves: Legendre Functions vs WKB Approximation. *2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)* (2-5 July). Kyiv, Ukraine, 2018, P. 181-184.

10. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Controlled Surface Terahertz Plasmonics in Layered Superconductors. *Complex Quantum Systems Out of Equilibrium* (August 25-29) Murcia, Spain, 2019, P. 16.

11. **N. Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Localized josephson plasma waves in a plate of layered superconductor in the presence of a dc magnetic field. *X International Conference for Professionals and Young Scientists "LOW TEMPERATURE PHYSICS" in memory of B.Verkin for his 100th birthday anniversary* (June 3 - 7) Kharkiv, Ukraine, 2019, P. 48.

12. **N. Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov. Resonant THZ wave transmission through a slab of a layered superconductor tuned by an external dc magnetic field. *International Scientific Conference "Physical Phenomena in Solids"* (December 3-5) Kharkiv, Ukraine, 2019, P. 26.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	18
ВСТУП	19
РОЗДІЛ 1 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ЗБУДЖЕННЯ В ШНП: СТАН І ПЕРСПЕКТИВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	26
1.1 Загальний опис ШНП і перспективи практичного викори- стання	26
1.2 Аналітичний підхід: синусоїдальні рівняння Гордона	30
1.2.1 порушення електронейтральності в СРГ	32
1.2.2 Розв’язок СРГ для статичного магнітного поля . . .	34
1.3 Проходження хвиль через зразок ШНП	36
1.3.1 Збудження локалізованих хвиль	36
1.3.2 Проходження лазерного пучка	37
Висновки до розділу 1	39
РОЗДІЛ 2 ЗАКОН ДИСПЕРСІЇ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ХВИЛЬ . . .	41
2.1 Геометрія, в якій шари паралельні границям розділу	41
2.1.1 Модель	42
2.1.2 Наслідки порушення електронейтральності	46
2.2 Геометрія, в якій шари перпендикулярні границі розділу . .	53
2.2.1 Модель	53
2.2.2 Вплив статичного магнітного поля на закон дис- персії	62
Висновки до розділу 2	65
РОЗДІЛ 3 РЕЗОНАНСНА ПРОЗОРІСТЬ ПЛАСТИНИ ШНП ДЛЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ	67
3.1 Модель	67
3.2 Модифікація методу трансфер-матриць	70
3.2.1 Трансфер-матриці для діелектриків	72

3.2.2	Трансфер-матриці для шаруватого надпровідника	74
3.2.3	Факторизація та аналіз трансфер-матриць для шаруватого надпровідника	78
3.3	Пропускання та відбиття	83
3.3.1	Закон дисперсії ЛХ	83
3.3.2	Коефіцієнти пропускання та відбиття	85
3.3.3	Вплив статичного магнітного поля на резонансну прозорість пластини	90
	Висновки до розділу 3	98
РОЗДІЛ 4 ФОКУСУВАННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ПЛАСТИНОЮ ШНП		100
4.1	Модель	100
4.1.1	Гауссовий пучок у вакуумі	102
4.1.2	Гауссовий пучок в ШНП	104
4.2	Отримання параметрів фокусування пучка	107
4.2.1	Пучок далеко від поверхонь пластини	107
4.2.2	Пучок поблизу поверхонь пластини	108
4.2.3	«Зшивання» полів лазерних пучків на границях між діелектриками та надпровідником	110
4.3	Вплив постійного магнітного поля на фокусування пучка	114
4.4	Верифікація результатів чисельною симуляцією	120
	Висновки до розділу 4	123
ВИСНОВКИ		124
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		127
ДОДАТОК А СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ		141
ДОДАТОК Б УТОЧНЕНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОПИСУ ПОШИРЕННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ПЛАСТНАХ ШНП . . .		144

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВТНП	—	високотемпературні надпровідники
ШНП	—	шаруватий надпровідник
ДПВ	—	джозефсонівські плазмові хвилі
ДПЧ	—	джозефсонівська плазмова частота
ЛХ	—	Локалізовані хвилі
ЕМ	—	електромагнітний
ГУ	—	гранична умова
СРГ	—	синусоїдальні рівняння Гордона
ТГц	—	терагерц
J_c	—	максимальна джозефсонівська густина струму
ω_J	—	джозефсонівська плазмова частота
φ	—	різниця фаз параметра порядку
λ_{ab}, λ_c	—	лондонівські глибини проникнення
$\gamma = \frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}}$	—	параметр анізотропії
T	—	коефіцієнт пропускання
R	—	коефіцієнт відбиття
$\Omega = \frac{\omega}{\omega_J}$	—	нормована частота
ε	—	діелектрична проникність
\hbar	—	постійна Планка
c	—	швидкість світла
e	—	елементарний заряд
k	—	хвильовий вектор
H_{dc}	—	постійне магнітне поле

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження

Шаруваті надпровідники (ШНП), такі як, наприклад, купратні високотемпературні надпровідники, сьогодні привертають значну увагу завдяки своїм унікальним фізичним властивостям, що пояснюються сильною анізотропією цих структур: надпровідні шари пов'язані між собою завдяки внутрішньому ефекту Джозефсона. Важливо зазначити, що теоретичні дослідження передбачають різні нелінійні явища в шаруватих надпровідниках, які можуть спостерігатися поблизу джозефсонівської плазмової частоти (ДПЧ) [1–3] навіть тоді, коли нема руху джозефсонівських вихорів. Окрім того, особливістю таких шаруватих структур є діапазон характерних частот — терагерцовий (ТГц) діапазон [4], який все ще є недостатньо представленим в наявних електронних і оптичних пристроях, але який має велику кількість можливих практичних застосувань у найрізноманітніших галузях від астрофізики до медицини [5–7], що робить ці матеріали ще більш перспективними. Нелінійність цих систем також пояснює чутливість ШНП до зовнішнього постійного магнітного поля [8], тому використання статичного магнітного поля є перспективним засобом контролю електромагнітних ефектів у таких структурах. Зокрема, такими ефектами можуть бути резонансна прозорість надпровідних пластин [9] і фокусування лазерного пучка [10]. Визначення можливостей такого методу для конкретних задач потребує детального аналітичного дослідження.

Мета дослідження — дослідити аналітично транспорт терагерцових електромагнітних хвиль через пластину шаруватого надпровідника та визначити можливості його налаштування з використанням статичного магнітного поля.

Завдання дослідження:

— знайти хвилі, локалізовані на тонкій пластині ШНП, у двох різних

геометріях задачі: коли шари паралельні поверхням пластини та коли вони перпендикулярні з урахуванням ефекту порушення електронейтральності та наявності зовнішнього статичного магнітного поля;

— модифікувати метод трансфер-матриць для опису поширення хвиль в пластині ШНП, враховуючи те, що за наявності зовнішнього статичного поля ЕМ хвиля всередині пластини ШНП не описується гармонічними функціями;

— отримати явні вирази для резонансних коефіцієнтів відбиття та пропускання для плоских ТГц хвиль. Дослідити можливість керування резонансними ефектами за допомогою статичного магнітного поля;

— отримати аналітичні вирази для основних параметрів фокусування лазерного пучка після проходження через пластину ШНП. Дослідити можливість налаштування фокуруючих властивостей пластини ШНП статичним магнітним полем;

— порівняти результати аналітичних розрахунків параметрів фокусування з результатами чисельної комп'ютерної симуляції.

Об'єкт дослідження — транспорт терагерцових плоских хвиль та терагерцових хвильових пучків гауссового профілю в пластині ШНП.

Предмет дослідження — можливості керування параметрами транспорту ТГц хвиль та пучків через пластину ШНП за допомогою зовнішнього статичного магнітного поля.

Методи дослідження:

Для отримання результатів використовувалися добре перевірені та загально прийняті методи теоретичної фізики, методи числових розрахунків і наближені методи асимптотичного аналізу. Поля в шаруватому надпровіднику аналізувалися за допомогою розв'язання зв'язаних синусоїдальних рівнянь Гордона. Проходження хвиль через багат шарову систему досліджувалося за допомогою методу трансфер-матриць. Порівняння результатів отриманих аналітичних виразів з числовими розрахунками

служувало додатковою верифікацією застосованих підходів.

Наукова новизна отриманих результатів: Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Вперше знайдено закон дисперсії локалізованих хвиль (ЛХ) у пластині ШНП скінченної товщини в різних геометріях з урахуванням ефекту порушення електронейтральності шарів надпровідника та з урахуванням наявності зовнішнього статичного магнітного поля. Показано, що в геометрії, коли шари паралельні границі розділу між вакуумом (з обох боків) та пластиною, порушення електронейтральності може викликати появу аномальної дисперсії хвиль в області частот, близьких до ДПЧ. Також виявлено інші наслідки цього ефекту, такі як поява додаткової забороненої зони поблизу цієї частоти й те, що для деяких параметрів спостерігається виродження спектра. Показано, що закон дисперсії для ЛХ в пластині ШНП у випадку, коли шари перпендикулярні поверхням, є чутливим до зовнішнього статичного магнітного поля.
2. Вперше модифіковано трансфер-матричний метод для опису поширення нелінійних електромагнітних хвиль у пластині ШНП, що знаходиться в зовнішньому постійному магнітному полі, та вперше знайдено специфічні матриці, які відповідають за взаємодію джозефсонівських плазмових хвиль (ДПХ) із зовнішнім магнітним полем. Розроблений метод застосовано до системи, що складається з пластини ШНП, обмеженої з двох боків діелектричними прошарками.
3. Вперше теоретично досліджено вплив статичного магнітного поля на резонансну прозорість тонкого зразка ШНП для ТГц хвиль, коли зразок знаходиться в діелектричному середовищі та відокремлений від нього тонкими просторовими проміжками вакууму. Показано, що зміна цього поля дозволяє отримати різні типи резонансних залежностей коефіцієнта пропускання від кута падіння, що відрізняються кількістю піків і їхньою шириною. Показано, що статичне поле може використовуватись для нала-

штування прозорості зразка та потребує на два порядки меншої відносної точності при встановленні, ніж у випадку керування за допомогою зміни частоти.

4. Вперше теоретично досліджено вплив статичного магнітного поля на фокусування лазерного пучка гауссового профілю пластиною ШНП. Отримано вирази для фокусної відстані та мінімального радіуса пучка, що залежать від статичного магнітного поля. Показано, що зміна величини поля дозволяє налаштовувати ці величини в широкому діапазоні значень, а також переводити пластину між режимами фокусування та розфокусування.

Особистий внесок здобувача

Наукові праці, в яких представлено основні результати дисертації, отримано та опубліковано в співавторстві. Дисертантка зробила значущий внесок у проведення дослідження та написання статей. Дисертантка успішно представляла результати роботи на міжнародних конференціях.

У роботі [11] дисертантка отримала та спростила вирази для трансфер-матриць та виразу коефіцієнта пропускання, чисельно побудувала графіки, написала основний текст.

У роботі [12] дисертантка розв'язала синусоїдальне рівняння Гордона в класі спеціальних функцій Лежандра та написала відповідну частину тексту.

У роботі [13] дисертантка модифікувала метод трансфер-матриць для досліджуваної проблеми проходження хвиль крізь пластину ШНП з урахуванням магнітного поля, написала основний текст.

У роботі [14] дисертантка отримала закон дисперсії локалізованих ТГц хвиль з урахуванням ефекту порушення електронейтральності в пластині шаруватого надпровідника скінченної товщини, побудувала графіки, написала основний текст, підготувала презентацію та була доповідачем.

У роботі [15] дисертантка отримала формули для коефіцієнта від-

биття та провела числові розрахунки для шаруватого метаматеріалу з певними параметрами, дослідила вплив величини зовнішнього магнітного поля на коефіцієнт відбиття, написала основний текст, підготувала презентацію та була доповідачем.

У роботі [16] дисертантка отримала формулу для коефіцієнта пропускання з урахуванням магнітного поля, написала тези, підготувала презентацію та була доповідачем.

У роботі [17] дисертантка отримала аналітичні вирази для параметрів фокусування лазерного пучка (радіуса променя, фокусної відстані) після проходження пластини, побудувала графіки за аналітичними формулами, написала основний текст.

У роботі [18] дисертантка описала джозефсонівські плазмові хвилі в термінах спецфункцій Лежандра.

У роботах [19, 20] дисертантка дослідила можливості управління законом дисперсії локалізованих хвиль.

У роботі [21] дисертантка дослідила вплив магнітного поля на поверхневі та хвилеводні моди, написала тези, підготувала презентацію та була доповідачем.

У роботі [22] дисертантка дослідила вплив магнітного поля на резонансне пропускання, написала тези, підготувала презентацію та була доповідачем.

Стаття [12], окрім результатів, представлених у основних положеннях даної дисертації, містить результати, які були представлені у докторській дисертації Апостолова С. С. [23]. Результати, отримані Апостоловим С. С., не перетинаються з результатами, отриманими здобувачкою. Здобувачкою було отримано дисперсійні співвідношення методом Лежандра, проаналізовано результати, виконано числові розрахунки та написано відповідну частину тексту. В той же час Апостолов С. С. отримав і проаналізував дисперсійні рівняння для локалізованих ДПХ за наявності

постійного магнітного поля, а також передбачив можливість внутрішнього відбиття ДПХ у неоднорідному магнітному полі у ВКБ наближенні для іншого діапазону параметрів системи.

Апробація матеріалів дисертації

Результати, представлені у дисертації, доповідалися дисертанткою на:

1. *2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW)* (November 14 – 18). Kharkiv, Ukraine, 2022, доповідь, приз за найкращу доповідь серед аспірантів та молодих вчених [14].
2. *2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials)* (September 20-23). New York, USA, 2021, доповідь [15].
3. *2020 XX Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини* (Жовтень 15-16). Львів, Україна, доповідь, диплом з відзнакою [16].
4. *X International Conference for Professionals and Young Scientists "LOW TEMPERATURE PHYSICS" in memory of B. Verkin for his 100th birthday anniversary* (June 3 - 7). Харків, Україна, доповідь [21].
5. *2019 International Scientific Conference "Physical Phenomena in Solids"* (December 3-5) (December 3-5). Харків, Україна, доповідь [22].

Препринти опубліковано на:

1. arxiv.org (2024) [17] (подається в журнал Phys. Rev. B).

Публікації

Результати дисертації опубліковано в 12 працях, у тому числі в 3-х статтях у наукових журналах [11–13], у 8 матеріалах конференцій [14–16, 18–22] та у одному препринті [17].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів, загальних висновків, 2-х додатків та списку використаних джерел. Обсяг загального

тексту дисертації складає 144 сторінок, з них основного тексту 111 сторінок. Робота ілюстрована 30 рисунками. Список використаних джерел містить 116 найменувань.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами

Робота пов'язана з виконанням завдань у рамках проєкту, фінансованого національним фондом досліджень України, проєкт №. 2020.02/0149 «Квантові явища у взаємодії електромагнітних хвиль з твердотільними наноструктурами».

Робота також пов'язана з виконанням досліджень у рамках державних наукових програм «Дослідження взаємодії електромагнітних та звукових хвиль, а також заряджених частинок з наноструктурами та метаматеріалами» (державний реєстраційний номер 0117U004038, роки виконання 2017-2021) і «Електродинамічні властивості гетероструктур та фотонних кристалів, що включають до себе гіротропні середовища, метаматеріали та шаруваті надпровідники» (державний реєстраційний номер 0120U100233, роки виконання 2020-2021).

Практичне значення отриманих результатів

Практична значущість результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що вони розширюють наявні фундаментальні теоретичні уявлення про особливості поширення ТГц електромагнітних хвиль у ВТНП шаруватої структури. На основі цих результатів можливо створити нові прилади, що працюють у характерному для шаруватих ВТНП ТГц діапазоні частот, зокрема фільтри, змішувачі, підсилювачі. Сфера можливих застосувань таких приладів є дуже широкою: від медичної діагностики до астрономічних спостережень. Досліджена можливість використання статичного магнітного поля для налаштування параметрів ШНП дозволяє запропонувати це як ефективний метод керування роботою таких приладів в експериментальних установках.

РОЗДІЛ 1

ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ЗБУДЖЕННЯ В ШНП: СТАН І

ПЕРСПЕКТИВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Загальний опис ШНП і перспективи практичного використання

Шаруваті надпровідники — це періодична структура (див. Рис. 1.1) з шарами надпровідника (товщини D_s) та діелектрика (товщини $D_0 - D_s$), коли перші пов'язані між собою ефектом Джозефсона. Струм J в пластині



Рис. 1.1 Схематичне зображення ШНП

ШНП на Рис. 1.1 — це джозефсонівський струм з густиною:

$$J = J_c \sin \varphi,$$

де: φ — калібровочно інваріантна міжшарова різниця фаз параметра порядку, J_c — максимальна густина бездисипативного джозефсонівського струму.

Прикладами є купратні ВТНП (наприклад, кристали $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$, $\text{La}_{2-\delta}\text{Sr}_\delta\text{CuO}_4$) або штучно створені шаруваті системи (наприклад, $\text{Nb}/\text{Al} - \text{AlO}_x/\text{Nb}$). Для природних кристалів, зазвичай, $D_s \ll D_0$, так як надпровідний шар має за порядком атомну товщину, тоді як для штучно створених структур це співвідношення, звичайно, може бути різним. Коректність такої моделі (внутрішній ефект Джозефсона) для опису ВТНП була неодноразово доведена експериментально [24–28]. В результаті взаємодії джозефсонівського струму з ЕМ полем в ШНП виникають унікальні колективні збудження — джозефсонівські плазмові хвилі (ДПХ) [29]. ДПХ колективно збуджуються в усіх джозефсонівських (тунельних) контактах, тобто кристали ВТНП реагують на змінне електромагнітні збурення як єдине ціле. Експериментально збудження ДПХ спостерігається за оптичним відбиттям і резонансним поглинанням [30, 31].

ШНП можуть бути компактними джерелами когерентного безперервного електромагнітного випромінювання в субтерагерцовому і терагерцовому діапазонах частот [29, 32–35], що має дуже багато можливих практичних застосувань в найрізноманітніших галузях від фундаментальної фізики до медицини [5–7, 36–39]. Прототипи пристроїв, побудовані на ВТНП технологіях, включають фільтри, підсилювачі ліній передач, а також схеми обробки даних для високошвидкісних цифрових і аналогових сигналів, антени, детектори і змішувачі [40] з можливими застосуваннями в метрології та комунікаційних технологіях [41]. Такі прилади є особливо перспективними твердотільними ТГц джерелами, здатними перекрити всю ТГц прогалину, оскільки їхній діапазон налаштування частоти значно ширше ніж діапазон налаштування у їхніх напівпровідникових конкурен-

тів — ТГц-квантових каскадних лазерів (QCLs) та одиночних резонансно-тунельних діодів (RTDs). Через свою унікальну електродинаміку ВТНП, наприклад $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$, також можуть бути використані в якості детекторів комутаційного струму, що має перспективи застосування в надшвидких комунікаціях, квантовій інформації, спектроскопії, неруйнівному зондуванні, тестуванні та комп'ютерній томографії [42–44].

Так як джозефсонівський струм є нелінійним ($J = J_c \sin \varphi$), поширення ДПХ в ШНП також є нелінійним. Для ЕМ хвиль з частотами, близькими до ДПЧ, можна спостерігати сильні нелінійні ефекти. Наприклад, нелінійний плазмовий резонанс, що демонструє гістерезисну поведінку [2], самофокусування [34] і самоіндуковану прозорість [45]. Нелінійні ефекти також вивчалися експериментально [46–48]. Окремо варто відзначити ще одну принципову особливість ШНП: чутливість до статичного магнітного поля. В нормальні немагнітні метали воно проникає однорідно, але в ШНП виникають струми Мейснера, що призводять до неоднорідного проникнення у вигляді «хвоста» джозефронівського вихора [49], створюючи неоднорідний фон для ДПХ, з якими воно взаємодіє завдяки нелінійності джозефсонівського струму. Тому воно може бути використано для управління ефектами в ШНП. Треба відзначити, що взаємодія ДПХ з статичним полем вивчалась також експериментально [29, 50].

ШНП є прикладом так званого гіперболічного матеріалу (ГМ), більш того, гіперболічність може бути відповідальною за високотемпературну надпровідність в ШНП [51]. В ГМ діагональні компоненти тензора діелектричної проникності можуть мати різні знаки, що призводить, наприклад, до негативного заломлення електромагнітних хвиль [52]. ГМ мають низку застосувань, наприклад, для сортування оптичних сигналів, отримання зображень без аберацій та надвисокої роздільної здатності, в надшвидкій оптиці, для створення гіперлінз, що порушують

дифракційну межу, біосенсорів та ін. [53–58]. Іншими прикладами ГМ в певних частотних діапазонах є деякі природні кристали (наприклад, SiO_2 , TiO_2 , BaTiO_3 , MoTe_2) [59, 60], також ГМ створюють на основі графену [61–63]. Штучні структури (гіперболічні метаматеріали) зазвичай створюють з нанодротів та шарів, і вони можуть мати ще більш складну структуру [64–66]. Через чутливість ШНП до статичного магнітного поля вони є прикладом налаштовуваного ГМ. Зазначимо, що існують і інші ГМ, властивості яких можна налаштовувати, наприклад, за допомогою прикладеної напруги [67], температури [68], магнітного поля [69], фазового переходу [70, 71], електрооптичних ефектів [72] та ін. Але ШНП є особливими, тому що чутливість до статичного поля властива їхній фізичній природі і не залежить від процесу фабрикації. Окрім того, ШНП є ГМ в ТГц діапазоні.

Серед матеріалів, які використовують при виготовленні звичайних лінз для ТГц випромінювання, зазвичай, віддають перевагу кремнію та тефлону, бо характеризуються відносно високим коефіцієнтом пропускання [73–75]. Але було розроблено альтернативні способи фокусування ТГц хвиль шаруватими та іншими неоднорідними структурами [76–80]. Використання ШНП для керування ТГц випромінюванням є перспективним, тому що дозволяє плавно налаштовувати і фокусувати ТГц хвилі [81].

1.2 Аналітичний підхід: синусоїдальні рівняння Гордона

Синусоїдальне рівняння Гордона (СРГ) є дуже важливою моделлю для опису нелінійних явищ завдяки своїй чудовій здатності давати велику кількість різних точних розв'язків, дозволяючи досліджувати задачі аналітично. Серед фізичних застосувань цієї математичної моделі опис електромагнітних явищ у джозефсонівських контактах є одним з найбільш важливих [82]. Набір зв'язаних СРГ для міжшарової різниці фаз параметра порядку вперше було отримано в роботі [83] для опису електродинаміки ШНП. Після цього ця система була переотримана, використовуючи інші підходи [30, 84–88].

Зв'язані СРГ не є точними, вони не враховують деякі важливі аспекти (наприклад, d-хвильове спарювання), але вони дають якісно коректний опис ДПХ і дозволяють робити правильні передбачення [89]. Наприклад, на основі цієї моделі в роботі [90] було запропоновано спосіб одержання когерентного випромінювання ТГц хвиль, який пізніше було реалізовано в експерименті [91].

Зв'язані СРГ для ДПХ в геометрії, схематично показаній на Рис. 1.1, можна записати у такому вигляді [4]:

$$\left(1 - \frac{\lambda_{ab}^2}{D_0^2} \partial_l^2\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi^{l+1,l}}{\partial t^2} + \omega_r \frac{\partial \varphi^{l+1,l}}{\partial t} + \omega_J^2 \sin \varphi^{l+1,l}\right) = \frac{c^2}{\varepsilon_c} \frac{\partial^2 \varphi^{l+1,l}}{\partial x^2}. \quad (1.1)$$

Тут оператор дискретної другої похідної ∂_l^2 визначається таким співвідношенням:

$$\partial_l^2 F_l = F_{l+1} + F_{l-1} - 2F_l,$$

джозефсонівська плазмова частота

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi e D_0 J_c}{\hbar \varepsilon_c}},$$

λ_{ab} — лондонівська глибина проникнення магнітного поля у перпендикулярному шарам напрямі, ω_r — частота релаксації, ε_c — діелектрична проникність діелектричних шарів, c — швидкість світла.

Якщо довжина електромагнітної хвилі у напрямі вісі z значно перевищує період D_0 шаруватої структури, то, нехтуючи дисипацією, рівняння (1.1) можна переписати в континуальному наближенні [49]:

$$\left(1 - \lambda_{ab}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sin \varphi \right] - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (1.2)$$

де $\lambda_c = c/(\omega_J \sqrt{\varepsilon_c})$ — лондонівська глибина проникнення магнітного поля вздовж шарів.

Калібровочно інваріантна різниця фаз φ пов'язана з z -проекцією A_z векторного потенціалу простим співвідношенням,

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi D_0} \varphi, \quad (1.3)$$

де $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ — квант магнітного потоку, якщо знехтувати порушенням електронейтральності надпровідних шарів. Тоді, як було показано в роботі [89], рівняння (1.2) напряду витікає з відомого рівняння для векторного потенціалу,

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}, \quad (1.4)$$

з компонентами густину струму:

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_x, \quad (1.5)$$

$$J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2}A_y, \quad (1.6)$$

$$J_z = J_c \sin \varphi = -J_c \sin \left(\frac{2\pi D_0}{\Phi_0} \right). \quad (1.7)$$

Векторний потенціал задає електричне і магнітне поля,

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.8)$$

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Рівняння (1.4) можна також переписати в термінах анізотропної ефективної діелектричної проникності з такими компонентами: [92]:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_c \left(1 - \gamma^2 \left[\frac{\omega_J^2}{\omega^2} - i v_x \frac{\omega_J}{\omega} \right] \right), \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_c \left(1 - \frac{\omega_J^2}{\omega^2} + i v_z \frac{\omega_J}{\omega} \right), \quad (1.11)$$

де $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} \gg 1$ — параметр анізотропії, а v_x , v_z — безрозмірні частоти релаксації. Відзначимо, що як теоретичні оцінки [4], так і експериментальні вимірювання [93, 94] цих частот показують, що при низьких температурах вони є малими у порівнянні з джозефсонівською плазмовою частотою.

1.2.1 Порухення електронейтральності в СРГ

Компонента E_z викликає порушення електронейтральності шарів, що призводить до додаткового міжшарового зв'язку — так званого ємнісного зв'язку. Для ВТНП параметр ємнісного зв'язку $\alpha = R_D^2 \varepsilon_c / (D_s D_0)$

зазвичай малий ($\alpha \sim 0.05 - 0.1$) [87, 95] (тут R_D — дебаївський радіус). Простий вираз (1.3) і відповідні вирази для компонент ЕМ поля можна отримати, тільки якщо знехтувати цим параметром. Це можна зробити для поперечних ДПХ [49]. Але для повздовжних хвиль при частотах близьких до ДПЧ цим ефектом нехтувати не можна [87].

В роботі [96] було враховано цей ефект для поверхневих хвиль в напівнескінченній пластині, поверхня якої паралельна шарам. СРГ (1.1) було переписано для компоненти магнітного поля $H_l \equiv H_y|_{z=lD}$ і лінеаризовано [96]:

$$\left(1 - \frac{\lambda_{ab}^2}{D^2} \partial_l^2\right) \left(\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 H_l}{\partial t^2} + H_l - \alpha \partial_l^2 H_l\right) = \lambda_c^2 \frac{\partial^2 H_l}{\partial x^2}. \quad (1.12)$$

Розв'язуючи це рівняння і використовуючи стандартну граничну умову на поверхні (тут поверхня тільки одна, адже зразок напівнескінченний), в роботі [96] показано, що через ненульовий параметр α з'являється додаткова гілка дисперсійної кривої, що, зокрема, має ділянку з аномальною дисперсією. Ця додаткова гілка впливає на властивості пластини, зокрема, на пропускання та відбиття електромагнітної хвилі [49].

У випадку, що досліджувався в задачі [96] (напівнескінченний зразок), є тільки поверхневі локалізовані хвилі, що швидко згасають у міру віддалення від границі зразка. Відомо, що у випадку скінченної товщини зразка, за умови $\omega > \omega_J$, наявні також власні моди, що осцилюють в зразку, так звані хвилеводні моди [97]. Як саме порушення електронейтральності впливатиме на ці моди до останнього часу було невідомо.

Також зазначимо, в роботі [96] не було детально досліджено найцікавішу область частот $\omega \approx \omega_J$, в якій проявляються сильні нелінійні ефекти [10].

1.2.2 Розв'язок СРГ для статичного магнітного поля

В роботі [49] було вивчено вплив статичного магнітного поля H_{dc} на поперечні поверхневі ЛХ в ШНП (границя розділу напівнескінченного зразка лежить в площині yOz на Рис. 1.1).

Постійне магнітне поле (у випадку, коли воно не перевищує критичного значення H_c і вихори в надпровіднику не утворюються) проникає в надпровідник неоднорідно, експоненційно згасаючи всередині пластини ШНП за законом $\sim \exp(-x/\lambda_c)$ [98]. Тому з'являється неоднорідний фон для лінійних ДПХ — стаціонарний розподіл різниці фаз φ_0 [49],

$$\varphi_{st}(x) = -4 \operatorname{arctg}[\exp(\frac{x - x_c}{\lambda_c} - \operatorname{arch} \frac{H_c}{H_{dc}})], \quad (1.13)$$

що є відомим солітонним розв'язком стаціонарного СРГ:

$$\sin \varphi - \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (1.14)$$

Тут: x_c — координата границі розділу, $H_c = \Phi_0/(\pi D_0 \lambda_c)$ — критичне магнітне поле, при перевищенні якого утворюються вихори.

Таким чином, статичне поле проникає в зразок як «хвіст» джозефсонівського вихору і швидко згасає всередині ШНП. Для лінійних ДПХ (тобто коли хвильова компонента міжшарової різниці фаз параметра порядку φ_w є малою величиною), джозефсонівський струм J можна представити в наступному вигляді [99]:

$$J = J_c \sin(\varphi_{st} + \varphi_w) \approx J_c \sin \varphi_{st} + J_c \varphi_w \cos \varphi_{st} \quad (1.15)$$

Другий доданок в рівнянні (1.15) пов'язує між собою лінійну ЕМ хвилю (що визначається хвильовим доданком φ_w) і статичне магнітне поле (що визначається стаціонарним доданком φ_{st}), тобто відображає взаємодію

статичного поля і ДПХ [99].

Скориставшись таким наближенням, в роботі [49] було розв'язано рівняння (1.2) у випадку напівнескінченного зразка в статичному полі і знайдено розподіл φ_w . Отримано також закон дисперсії поверхневих хвиль з $\omega < \omega_J$ та продемонстровано вплив на нього статичного поля [49]. Точний розв'язок СРГ записано в термінах гіпергеометричних функцій. Тобто функції, які описують хвилю, не є гармонічними, гармонічність можлива лише асимптотично за певних умов.

1.3 Проходження хвиль через зразок ШНП

В цьому підрозділі ми коротко опишемо 2 приклади нещодавно розв’язаних цікавих задач стосовно поширення ЕМ збуджень в ШНП, для яких очікується можливість використання слабкого статичного поля для налаштування передбачуваних ефектів.

1.3.1 Збудження локалізованих хвиль

Першою є задача [9], в якій досліджено пропускання ТГц хвиль через пластину ШНП, що відокремлено від діелектричного середовища з діелектричною проникністю ($\varepsilon_a > 1$) просторовими проміжками вакууму ($\varepsilon = 1$). Шари пластини перпендикулярні поверхням.

В такій геометрії можливе збудження локалізованих хвиль при кутах опромінювання, що є більшими ніж кут повного внутрішнього відбиття θ_b [100]:

$$\theta_b = \arcsin \sqrt{1/\varepsilon_a}, \quad 0 < \theta_b < \pi/2. \quad (1.16)$$

При цих кутах за відсутності зразка спостерігалось б повне відбиття хвиль, але завдяки збудженню ЛХ, при певних значеннях кута θ та частоти ω , можливе повне пропускання (коефіцієнт проходження $T = 1$) — резонансне пропускання. В інших областях (тобто далеко від резонансу), пропускання є практично відсутнім — експоненціально малим, а області резонансу, очікувано, нагадують дисперсійні криві.

Немонотонність дисперсії мод, локалізованих на пластині, пояснює специфічну залежність $T(\theta)$. Зокрема, передбачається спостерігання двох піків та злиття їх в один «широкий» пік при збільшенні частоти. Це пояснюється гіперболічними властивостями ШНП.

Задачу розв'язано для лінійних ДПХ в припущенні відсутності дисипації, тобто значення v_x та v_z , що визначають уявну частину компонент тензора ε в рівняннях (1.10), (1.11), дорівнюють нулю. Слабку дисипацію в такій геометрії для аномалій Вуда (резонансного підсилення поглинання, викликаного збудженням ЛХ [101]) було враховано в статті [92]. Якісно, врахування дисипації не змінює результат. Тому в подальшому ми будемо припускати її відсутність.

1.3.2 Проходження лазерного пучка

В експериментальних дослідженнях ШНП [29, 102] зазвичай використовують просторово розподілене опромінювання у вигляді лазерного пучка, отриманого з кристалів ZnTe. Енергія одиничного імпульсу таких лазерів, що випромінюють в ближньому інфрачервоному діапазоні, досягає наноджоулів при значеннях електричного поля до 1 кВ/см [103]. Для спостереження нелінійних ефектів в ШНП можуть бути потрібні сильніші поля [2], для досягнення яких існують різні методи. Зокрема, в роботі [104] використано метод нахиленого фронту імпульсу для дослідження відгуку ШНП $\text{La}_{1.84}\text{Sr}_{0.16}\text{CuO}_4$ на зовнішнє ТГц випромінювання, лазер було сфокусовано до поперечного перерізу 1 мм^2 , а поле досягало 100 кВ/см. В роботі [35] за допомогою лазера на вільних електронах досліджувались нелінійні джозефсонівські плазмові солітони, передбачені у [105], поле досягало 10 кВ/см. Використовують також газові лазерів на основі СО, які працюють в ТГц діапазоні [106–108]. Тобто є можливість досягти достатньо високих для спостереження нелінійних ефектів в ШНП амплітуд імпульсним випромінюванням.

В роботі [10] вперше теоретично досліджено фокусуючі властивості пластин ШНП для ЕМ опромінювання у вигляді гауссового пучка. Показано, що пластина ШНП може ефективно фокусувати лазерний пучок.

Крім того, показано, що через нелінійність джозефсонівської плазми параметри фокусування (а саме, фокусна відстань і мінімальний переріз променя) залежать від інтенсивності падаючого променя. Більш того, очікується, що в експериментах з ТГц лазерами можна спостерігати гістерезисну поведінку цієї залежності.

Розрахунки в роботі [10] було верифіковано симуляцією, відкритим залишилось лише питання гістерезису. Вплив статичного магнітного поля на фокусуючі властивості не було досліджено, що могло б дати можливість управління фокусуючими властивостями пластини ШНП.

Висновки до розділу 1

1. Шаруваті надпровідники — це сильно анізотропні шаруваті структури з тонкими надпровідними шарами, що зв'язані внутрішнім ефектом Джозефсона, тобто поперек шарів тече джозефсонівський струм. Ці структури є прикладом гіперболічних матеріалів в ТГц частотному діапазоні. Окреслено можливі практичні застосування ШНП, наприклад, для створення ТГц-пристроїв, потреба в яких існує в багатьох галузях фундаментальної та прикладної науки, а також в комунікаційних, біомедичних та інших технологіях. В рамках теоретичного підходу до опису цих шаруватих структур для опису ЕМ поля в ШНП зазвичай використовують синусоїдальні рівняння Гордона.

2. Між надпровідними шарами ШНП може виникати додатковий ємнісний зв'язок, пов'язаний з порушенням електронейтральності шарів. Це суттєво впливає на повздовжні ДПХ. Вплив порушення електронейтральності було теоретично досліджено для випадку напівнескінченного зразка, а саме було показано виникнення додаткової (в порівнянні з ідеальним електронейтральним варіантом) дисперсійної кривої для поверхневої локалізованої хвилі, причому ця крива містить частину з аномальною дисперсією. Наявність цієї гілки впливає на пропускання та відбиття хвилі. В той же час не було досліджено область частот поблизу ДПЧ, в якій спостерігаються сильні нелінійні ефекти, і, крім того, залишається відкритим питання наслідків порушення електронейтральності у випадку скінченної товщини зразка, коли є не тільки поверхневі, а й хвильоводні моди, що осцилюють в зразку.

3. Важливою особливістю ШНП є їхня взаємодія з статичним магнітним полем, що є перспективним з точки зору налаштування властивостей

пластин ШНП в експерименті. Цю взаємодію було досліджено для напівнескінченного зразка і було показано, що функції, якими описується поверхнева хвиля, в цьому випадку не є гармонічними. Випадок скінченного зразка потребує додаткового дослідження.

4. Існує широкий спектр ефектів в ШНП, якими можна керувати за допомогою зовнішнього постійного магнітного поля, але відповідні теоретичні дослідження не проводились. Зокрема, у роботах, де вивчалось поширення хвиль в пластинах ШНП скінченної товщини, наявність статичного поля не була врахована. Це, зокрема, робота про збудження локалізованих хвиль, в якій було показано, що завдяки немонотонності дисперсії цих хвиль (наявності ділянок з аномальною дисперсією), резонансне пропускання хвиль має специфічні особливості: двопікові криві пропускання. Другою важливою задачею є вивчення особливостей нелінійного фокусування лазерного пучка, який проходить через ШНП, що відповідає сучасним експериментальним дослідженням. Показано, що завдяки нелінійності, параметри фокусування пучка залежать від амплітуди хвилі та можуть також демонструвати гістерезисну поведінку. Дослідити вплив статичного магнітного поля в цій задачі могло б дозволити отримати кращі методи контролю над фокусуючими характеристиками.

РОЗДІЛ 2

ЗАКОН ДИСПЕРСІЇ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ХВИЛЬ

В цьому розділі розглянуто власні моди в пластині ШНП: поверхневі та хвилевідні ЛХ. Нижче знайдено закон дисперсії ЛХ у двох природно найпростіших геометріях, в яких можна помістити пластину ШНП в діелектричне середовище: коли шари

- а) паралельні,
- б) перпендикулярні

границям розділу ШНП-діелектрик. Буде враховано порушення електронейтральності шарів та наявність постійного магнітного поля.

В цьому розділі представлено результати, опубліковані в роботах [12, 14, 18–21].

2.1 Геометрія, в якій шари паралельні границям розділу

Нижче досліджуються власні моди в пластині ШНП скінченної товщини з урахуванням ефекту порушення електронейтральності в геометрії, коли шари паралельні до границь поділу. Спектр цих хвиль (як поверхневих, експоненціально затухаючих всередині пластини ШНП, так і хвилевідних, осцилюючих в пластині) вивчався в [97] для електронейтрального випадку, і було отримано нормальну дисперсію в цій геометрії.

В роботі [96] проаналізовано поверхневі ДПХ для нескінченної пластини з врахуванням в СРГ члена, який відповідає за порушення нейтральності. Показано, що в дисперсійних кривих з'являється додаткова гілка. Оскільки поверхневі моди швидко згасають при віддаленні від поверхні зразка, то спектр поверхневої моди (коли частота нижче джозефсонівської), звичайно, подібний до випадку напівнескінченного зразка,

і тому нижче основну увагу буде зосереджено насамперед на хвилевідних модах.

2.1.1 Модель

Досліджуються ТМ-поляризовані хвилі,

$$\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \mathbf{H} = \{0, H_y, 0\},$$

частоти ω , локалізовані на пластині ШНП, що містить $(2l_0 + 1)$ надпровідних шарів (див. Рис. 2.1). Вважатимемо, що шари паралельні до поверхонь пластини, які також є надпровідними шарами, тоді товщина пластини дорівнює $2l_0 D_0$, де D_0 — період шаруватої структури. Будемо вважати, що пластина достатньо товста, тобто

$$l_0 \gg 1.$$

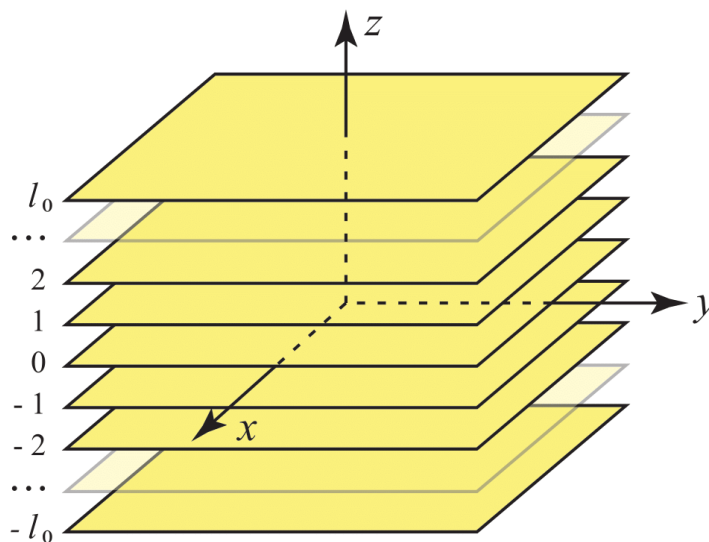


Рис. 2.1 Пластина ШНП з $(2l_0 + 1)$ шарами у вакуумному середовищі

Зауважимо, що непарна кількість шарів $(2l_0 + 1)$ не є принциповою для розв'язку задачі, і її було обрано виключно з міркувань простоти запису рівнянь, наведених нижче.

З симетрії задачі випливає, що магнітне поле локалізованих хвиль може бути

- а) симетрично,
- б) антисиметрично

розподілене відносно площини $z = 0$ — середини пластини.

Ми досліджуємо власні ЕМ хвилі для обох випадків розподілу магнітного поля відносно $z = 0$. В обох випадках достатньо знайти розподіл у верхньому півпросторі, $z > 0$. Розподіл в нижньому півпросторі, $z < 0$, елементарно знаходиться, використовуючи згадану симетрію.

Електромагнітне поле в вакуумі

У вакуумі, $|z| > l_0 D_0$, ми використовуємо умову локалізації, тобто вважаємо хвилі згасаючими в напрямку z ,

$$E_x, E_z, H_y \propto \exp(-i\omega t + ik_x x - k_v |z|),$$

з відомим дисперсійним співвідношенням,

$$k_v = \sqrt{k_x^2 - \omega^2/c^2}.$$

Тут k_x — поздовжнє хвильове число і c — швидкість світла. За допомогою рівнянь Максвела легко знайти співвідношення тангенціальних компонент електричного E_x та магнітного H_y поля безпосередньо над поверхнею

пластини,

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{ick_v}{\omega}. \quad (2.1)$$

Електромагнітне поле в ШНП

Всередині пластини ШНП, для $|z| < l_0 D_0$, розподіл поля визначається набором зв'язаних СРГ для міжшарової різниці фаз параметра порядку (див. розділ 1), яку можна лінеаризувати та переписати для міжшарового магнітного поля $H_l \equiv H_y|_{z=lD}$ у вигляді (1.12) [96]. Його рішення шукаємо у вигляді локалізованих хвиль,

$$H_l^{\pm} = C_{\pm} \exp(-i\omega t + ik_x x) \times [\exp(-k_s(l_0 - l)D_0) \pm \exp(-k_s(l_0 + l)D_0)]. \quad (2.2)$$

Тут знаки “+” та “−” відповідають симетричним і антисиметричним модам.

Підставивши (2.2) в (1.12), отримаємо неявне рівняння для хвильового числа k_s :

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_J^2} - 1 + 4\alpha\kappa\right) \left(1 - \frac{4\lambda_{ab}^2}{D_0^2}\kappa\right) = \frac{c^2 k_x^2}{\omega_J^2 \varepsilon_c}, \quad (2.3)$$

де

$$\kappa = \sinh^2\left(\frac{k_s D_0}{2}\right). \quad (2.4)$$

Воно є квадратним відносно κ , і отже, ми маємо два розв'язки для k_s^2 .

Використовуючи лондонівське рівняння для H_y поблизу верхньої

межі розділу ($z = l_0 D_0$) в дискретному наближенні,

$$\frac{H_{l_0} - H_{l_0-1}}{D_0} \approx \frac{-icE_{l_0}}{\lambda_{ab}^2 \omega},$$

де $E_l \equiv E_x|_{z=lD_0}$, а також вираз (2.2), нескладно отримати такі співвідношення для тангенціальних компонент ЕМ поля при $z = l_0 D_0$, тобто безпосередньо під поверхнею пластини:

$$\frac{E_{l_0}^+}{H_{l_0}^+} = \frac{i\omega\lambda_{ab}^2}{cD_0} \left(1 - \frac{\cosh[k_s(l_0 - 1)D_0]}{\cosh[k_s l_0 D_0]} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{E_{l_0}^-}{H_{l_0}^-} = \frac{i\omega\lambda_{ab}^2}{cD_0} \left(1 - \frac{\sinh[k_s(l_0 - 1)D_0]}{\sinh[k_s l_0 D_0]} \right). \quad (2.6)$$

Співвідношення (2.5) та (2.6) записано для симетричних та антисиметричних мод, відповідно.

Легко бачити, що для нескінченно товстої пластини ($l_0 \rightarrow \infty$) і для $k_s^2 > 0$ (поверхневі моди) обидва рівняння (2.5) і (2.6) мають однаковий граничний вид,

$$\lim_{l_0 \rightarrow \infty} \frac{E_{l_0}^\pm}{H_{l_0}^\pm} = \frac{i\omega\lambda_{ab}^2}{cD_0} (1 - e^{-k_s D_0}),$$

що повністю узгоджується з результатом, отриманим для напівнескінченної пластини у [96].

В континуальному наближенні $k_s D_0 \ll 1$ маємо:

$$\frac{E_{l_0}^+}{H_{l_0}^+} = \frac{i\omega\lambda_{ab}^2 k_s}{c} \tanh(k_s l_0 D_0), \quad (2.7)$$

$$\frac{E_{l_0}^-}{H_{l_0}^-} = \frac{\omega\lambda_{ab}^2 k_s}{ic} \frac{1}{\tanh(k_s l_0 D_0)}, \quad (2.8)$$

для симетричного, рівняння (2.7), і антисиметричного, рівняння (2.8), випадків, відповідно. Аналогічні вирази були отримані в [97], але для

електронеїтрального випадку.

Дисперсійне співвідношення

Зіставлення співвідношень (E_x/H_y) на границі пластини ШНП (2.1), (2.5) і (2.6), з вираженням гіперболічних косинусів через κ (2.4) дозволяє отримати дисперсійні співвідношення для ЛХ у такому вигляді,

$$\frac{\sqrt{c^2 k_x^2 - \omega^2}}{r\omega^2/\omega_J} = 1 - \frac{\varkappa^{1-l_0} \pm \varkappa^{l_0-1}}{\varkappa^{-l_0} \pm \varkappa^{l_0}}, \quad (2.9)$$

де символи “+” та “−” позначають симетричний та антисиметричний випадки, відповідно,

$$\varkappa = 1 + 2\kappa - 2\sqrt{\kappa + \kappa^2},$$

та введено параметр

$$r = \lambda_{ab}^2 \omega_J / cD_0.$$

Слід підкреслити, що рівняння (2.3) має два різні розв’язки, тому що воно є квадратним відносно κ . А отже, існує **два типи дисперсійних кривих** при кожному типі симетрії. Нижче їх розглянуто детальніше.

2.1.2 Наслідки порушення електронеїтральності

Спектр ЛХ, визначений дисперсійним співвідношенням (2.9), зображено на Рис. 2.2 та 2.3 при характерних значеннях параметрів ШНП, таких як $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ чи $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ [29]. Відмінний від нуля коефіцієнт α , який відповідає за порушення електронеїтральності в ШНП, суттєво змінює спектр ЛХ в порівнянні з тим, що отримується

для $\alpha = 0$ в [97]. Детальний аналіз спектра ЛХ в геометрії, що зображено на Рис. 2.1, але без порушення електронейтральності, тобто для $\alpha = 0$, представлено в [97], де отримана одна поверхнева мода (при $\omega < \omega_J$) з нормальною дисперсією та набір хвилевідних мод (при $\omega > \omega_J$) теж з нормальною дисперсією.

Нижче буде описано вплив ненульового $\alpha > 0$ на спектр ЛХ та підкреслено головні відмінності від випадку $\alpha = 0$.

Дегенарція спектра

На Рис. 2.2 побудовано закон дисперсії хвилевідних мод. Помаранчеві та сині суцільні лінії на цьому рисунку відповідають симетричним та антисиметричним модам 1-го типу, а штрихові — 2-го типу. Антисиметричні моди пронумеровано в порядку зростання k_s . Чорним показано світову лінію $\omega = ck_x$, рожевим — додаткову заборонену область. Параметри для цього рисунка: $\alpha = 0.1$, $l_0 = 80$, $r = 0.7$, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 15$, $\varepsilon_c = 16$. Видно, що існує два різних типи кривих, які відповідають двом різним розв'язкам рівняння (2.3), квадратного по κ . Ми називаємо ці криві, які відповідають цим розв'язкам, кривими 1-го (“плюс”) та 2-го (“мінус”) типу в залежності від знаку перед квадратним коренем у розв'язку квадратного рівняння (2.3).

В континуальному наближенні дисперсійне рівняння (2.9) з підставленим в нього розв'язком (2.3) 1-го типу при $\alpha \rightarrow 0$ перетворюється на рівняння, яке було отримано в статті [97] для відносно невисоких частот, тобто для $\omega \ll \gamma\omega_J$ ($\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ — параметр анізотропії ШНП, що зазвичай становить $10 \div 100$ для різних матеріалів). Отже, ці криві 1-го типу (суцільні криві на Рис. 2.2) виглядають подібно до наведених в [97].

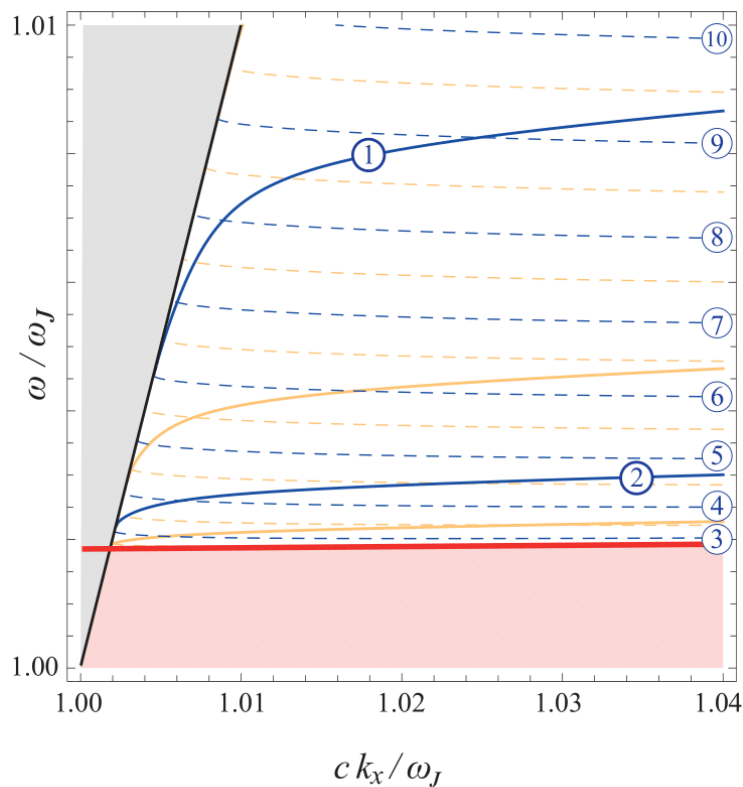


Рис. 2.2 Спектр хвильовідних мод (високі частоти)

Розв'язок (2.3) 2-го типу продукує нове, принципово інше дисперсійне рівняння. Це призводить до нового набору дисперсійних кривих, які показано штриховими лініями на Рис. 2.2.

Можна помітити, що дисперсійні криві для хвильовідних мод ($\omega > \omega_J$, $k_s^2 > 0$) 1-го та 2-го типу перетинаються при певних параметрах, а отже спектр вироджується при цих параметрах. Ці точки перетину — виродження — відповідають двом різним значенням k_s для різних кривих, при цьому, що важливо, хвильове число k_s є більшим для «нових» штрихових кривих, що виникають через порушення електронейтральності. Задачу про збудження ЛХ — питання про те, яка саме з цих двох вироджених мод буде збуджена — слід розв'язувати враховуючи так звані додаткові граничні умови (див., [87]).

На Рис. 2.3 показано закон дисперсії ЛХ для низьких частот, за

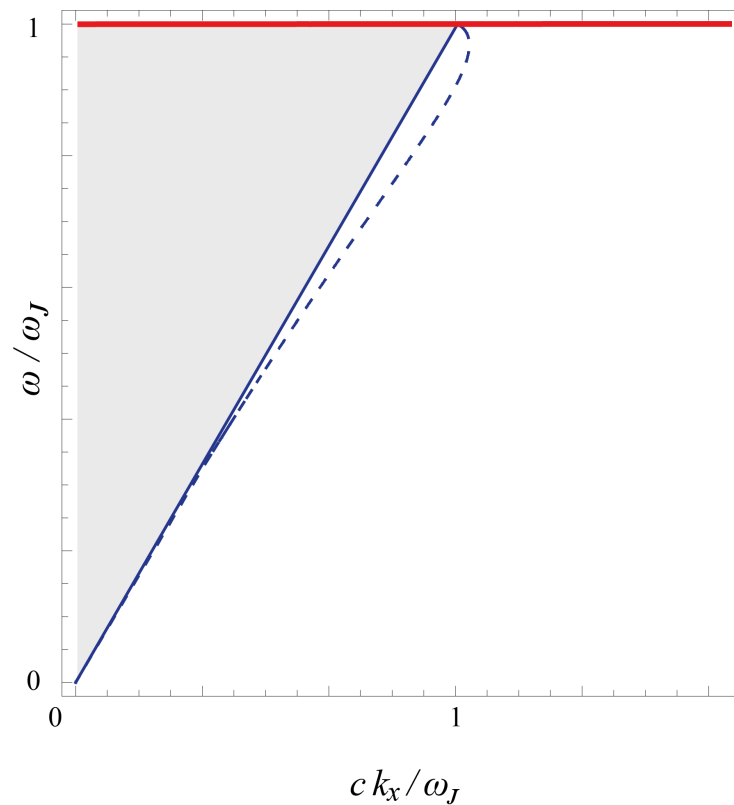


Рис. 2.3 Спектр поверхневих мод (низькі частоти).

яких хвиля згасає в зразку, тобто поверхневих хвиль. Суцільними та штриховими синіми лініями показано моди 1-го і 2-го типів, відповідно, параметри обрані такі ж, як на Рис. 2.2. Рис. 2.4 показує «збільшення» Рис. 2.3 поблизу точки об'єднання кривих цих двох типів.

Що стосується поверхневих мод ($\omega < \omega_J$, $k_s^2 < 0$) (див. Рис. 2.3), то у цьому діапазоні частот спектр мод, локалізованих на пластині ШНП скінченної товщини, подібний до спектра мод, локалізованих на напівнескінченній пластині (див. [96]) і криві, очікувано, практично не відрізняються для симетричного та антисиметричного розподілів поля, адже поверхневі моди існують тільки поблизу поверхонь. В цій частотній області не з'являються точки перетину дисперсійних кривих, тобто спектр поверхневих мод не вироджується.

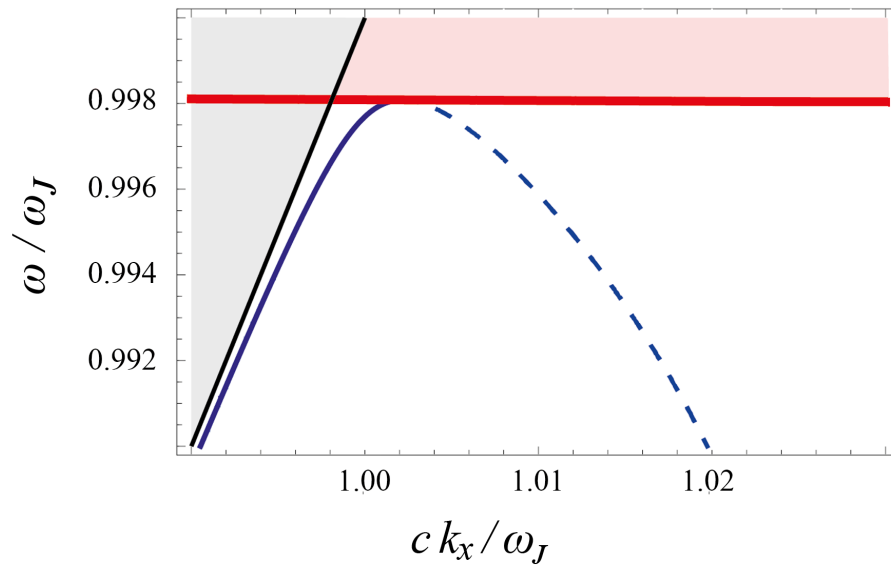


Рис. 2.4 Спектр поверхневих мод (низькі частоти, близькі до джозефсо-нівської)

Заборонена зона

На Рис. 2.2 та 2.3 поблизу частоти Джозефсона можна побачити показану рожевим вузьку заборонену область. Ця додаткова область відповідає нерівності

$$\frac{|\alpha(D_0/\lambda_{ab})^2 + (\omega/\omega_J)^2 - 1|}{2k_s\lambda_c(D_0/\lambda_{ab})\sqrt{\alpha}} < 1. \quad (2.10)$$

В цій області величини κ , що є коренями квадратного рівняння (2.3), стають комплексними, а тому дисперсійне рівняння (2.9) не має розв'язків, які відповідають бігучим хвилям з позитивними ω та k_x . З умови (2.10) нескладно побачити, що ширина цієї рожевої забороненої зони залежить від параметра α і хвильового числа k_x . Вона асимптотично пропорційна $\sqrt{\alpha}k_x$ при малих параметрах α .

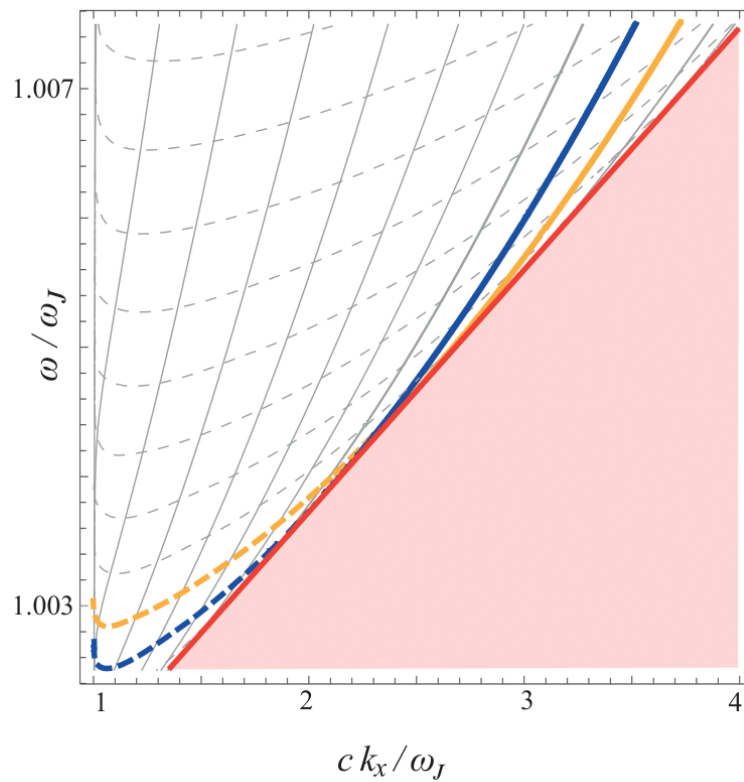


Рис. 2.5 «З'єднання» дисперсійних кривих хвильових мод

Варто зазначити, що границя забороненої області (червона лінія) відповідає ситуації, коли дискримінант (2.3) дорівнює нулю, а отже між двома розв'язками немає різниці. Тому, очевидно, криві 1-го (суцільного) та 2-го (штрихового) типу мають з'єднуватися в одну криву на цій червоній лінії.

Для хвильових чисел k_x , які знаходяться недалеко від світлової лінії $\omega = ck_x$, це «з'єднання» можна побачити (див. Рис. 2.4) лише для поверхневої моди, тоді як на Рис. 2.2 кожна з (суцільних) кривих 1-го типу «з'єднується» зі своєю «парою» 2-го типу (штриховою), утворюючи єдину цілу криву з двох гілок, при вищих хвильових числах k_x (див. Рис. 2.5). Тут кольором для наочності виділено дисперсійні криві для одної симетричної та одної антисиметричної моди, що складаються з двох гілок — першого (суцільна лінія) та другого (штрихова лінія) типів.

Аномальна дисперсія

Іншим не менш цікавим результатом ефекту порушення електро-нейтральності є аномальна дисперсія. Як поверхневі, так і хвилевідні моди тепер можуть мати аномальну дисперсію. Дійсно, усі штрихові криві («нові» гілки дисперсійних кривих) на Рис. 2.2, 2.3 та 2.5 містять ділянки, для яких

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} < 0,$$

тобто ділянки з від'ємною груповою швидкістю.

Для поверхневих мод, для яких

$$\omega < \omega_J, \quad k_s^2 < 0,$$

дисперсія є нормальною поблизу світлової лінії $\omega = ck_x$. При віддаленні від світлової лінії вона стає аномальною (див. Рис. 2.3 та 2.4).

Хвилеводні моди, для яких

$$\omega > \omega_J, \quad k_s^2 > 0,$$

починаються біля світлової лінії з аномальної дисперсії, а потім, при збільшенні хвильового числа, вони стають нормальними (див. Рис. 2.5).

При поширенні вздовж пластини ШНП пучка заряджених частинок аномальна дисперсія може призводити до абсолютної нестабільності хвилі. Тому можна запропонувати ШНП в якості середовища затримки в ТГц пристроях для генерації хвилевідних і поверхневих хвиль без необхідності забезпечення додаткового зворотного зв'язку в системі [14].

2.2 Геометрія, в якій шари перпендикулярні границі розділу

У цьому підрозділі досліджуються власні моди (поверхневі й хвилевідні) в пластині ШНП скінченної товщини в геометрії, коли шари перпендикулярні границі розділу, в присутності зовнішнього постійного магнітного поля H_{dc} . В цьому випадку, для поперечних хвиль, порушенням електронеутральності шарів можна знехтувати.

Подібну задачу вже було розв'язано для поверхневих хвиль в напівнескінченній пластині [49], тому основну увагу буде знов приділено хвилевідним модам.

2.2.1 Модель

Геометрію задачі представлено на Рис. 2.6. Пластина ШНП товщини d_c поміщено в діелектричне середовище з діелектричною проникністю ε_b (напівпростори $|x| > d_c/2$). Пластину ШНП вважаємо достатньо товстою, тобто такою, для якої виконується:

$$\exp(d_c/\lambda_c) \gg 1, \quad (2.11)$$

Поле вважаємо слабким, тобто меншим критичного,

$$H_{dc} < H_c. \quad (2.12)$$

В цьому випадку воно проникне в пластину ШНП на невелику відстань ($\sim \lambda_c$) [49] і вихори в пластині не утворюються.

Досліджуються, як і в попередньому випадку, ТМ-поляризовані хвилі частоти ω , електричне і магнітне поля яких в обраній координатній системі представляються у вигляді:

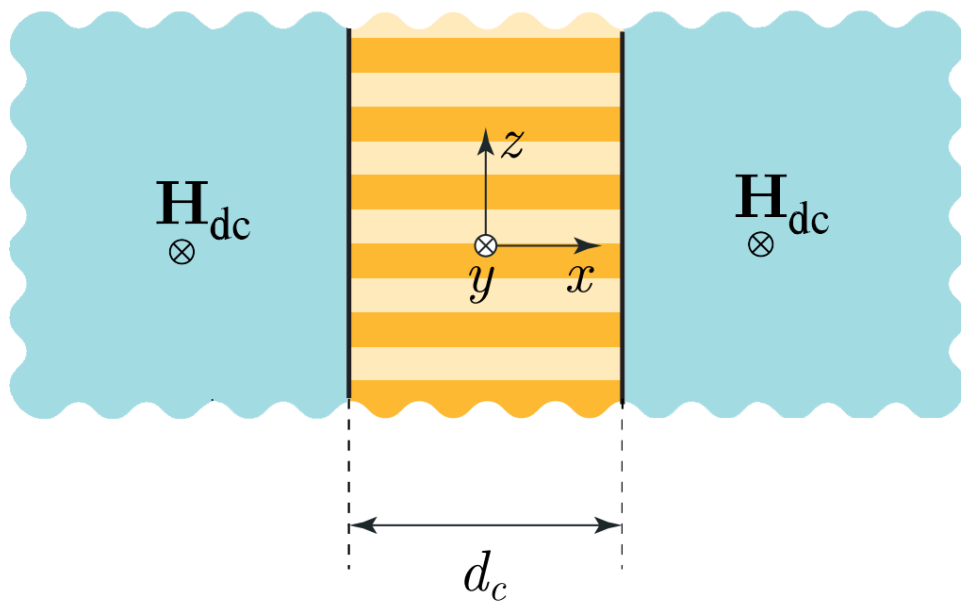


Рис. 2.6 Пластина ШНП у вакуумному середовищі в зовнішньому магнітному полі

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}(x, z, t) = \{0, H_y(x), 0\} \exp(-i\omega t + ik_z z). \quad (2.14)$$

Як і в попередньому випадку, через симетрію задачі, поверхневі та хвильовідні моди бувають двох типів:

- а) симетричними,
- б) антисиметричними

по розподілу магнітного поля відносно площини $z = 0$.

Електромагнітне поле в вакуумі

Оскільки ми шукаємо ЛХ, то в діелектрику, $|x| > d_c/2$, хвилі є згасаючими при збільшенні $|x|$. Відповідно, компоненти ЕМ поля мають такий вигляд:

$$H_y(x) = H^\pm e^{\mp k_b(x \mp \frac{d_c}{2})}, \quad (2.15)$$

$$E_z^\pm(x) = \frac{\mp c k_b}{\varepsilon_b \omega} H^\pm e^{\mp k_b(x \mp \frac{d_c}{2})}, \quad (2.16)$$

з відомим дисперсійним співвідношенням,

$$k_b = \sqrt{k_z^2 - \varepsilon_b \omega^2 / c^2}.$$

Верхні індекси, «+» або «-», в (2.15), (2.16) стоять для правого ($x > d_c/2$) напівпростора, а нижні — для лівого ($x < -d_c/2$). Тоді, безпосередньо над поверхнею пластини ШНП ($x = d_c/2$), відношення тангенціальних компонент електричного та магнітного полів є наступним:

$$\frac{E_z}{H_y} = -\frac{c k_b}{\omega \varepsilon_b}. \quad (2.17)$$

Для вакууму $\varepsilon_b = 1$.

Електромагнітне поле в ШНП

Всередині пластини ШНП, при $|x| < d_c/2$, розподіл поля визначається рівнянням (1.2) для різниці фаз φ (див. розділ 1).

Таким самим методом, як і в роботі [49], ми представимо різницю фаз φ у вигляді суперпозиції статичного φ_{st} і малого хвильового φ_w доданків, вважаючи хвилі лінійними.

Оскільки пластина ШНП є достатньо товстою, то ми можемо

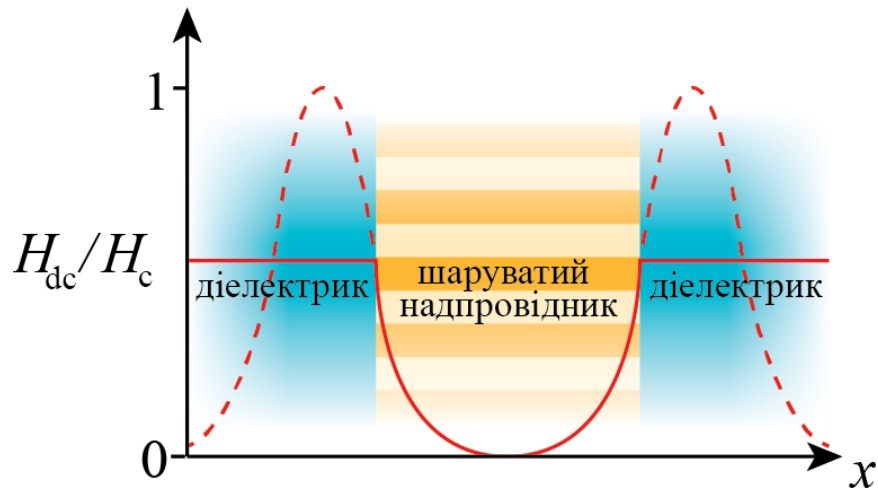


Рис. 2.7 Схематичний розподіл статичного магнітного поля H_{dc}

вважати, що магнітне поле, яке, як відомо, швидко згасає в нашому зразку (див. Рис.2.7), є експоненційно малим при $x = 0$, тобто

$$\varphi_{st}(0) \approx 0.$$

Тоді сумарну різницю фаз φ можна записати так:

$$\varphi(\xi, z, t) = \varphi_{st}^+(\xi) + \varphi_{st}^-(\xi) + \varphi_w(\xi, z, t), \quad (2.18)$$

де φ_w має вигляд хвилі,

$$\varphi_w(\xi, z, t) = f(\xi) \exp(ik_z z - i\omega t),$$

і визначає змінне поле, а статичне поле визначається суперпозицією двох доданків, що мають вигляд, ідентичний з (1.13):

$$\varphi_{st}^{\pm}(\xi) = \mp 4 \arctg[\exp(\xi_0 \pm \xi)].$$

Тут:

$$\xi_0 = \text{arch } h_0^{-1} + \delta, \quad (2.19)$$

$\xi = x/\lambda_c$, $\delta = d_c/2\lambda_c$, $h_0 = H_{\text{dc}}/H_c$ — нормовані координата, товщина пластини ШНП, та величина зовнішнього поля.

Підставляючи (2.18) в СРГ (1.2), отримуємо:

$$\frac{f''(\xi)}{\kappa_s^2} + [1 + u_H(\xi) + u_H(-\xi)]f(\xi) = 0, \quad (2.20)$$

де:

$$u_H(\xi) = \frac{2}{(\Omega^2 - 1) \text{ch}^2(\xi_0 + \xi)}, \quad (2.21)$$

$$\kappa_s^2 = (\Omega^2 - 1) \left(1 + \frac{(k_z \lambda_{ab})^2}{1 - \Omega^2/\gamma^2}\right), \quad (2.22)$$

$\Omega = \omega/\omega_J$ — нормована частота.

Доданки $u_H(\pm\xi)$ в рівнянні (2.20) відповідають «хвостам» двох солітонів, у вигляді яких статичне магнітне поле h_0 проникає в пластину ШНП зліва та справа (див. Рис. 2.7) і, таким чином, створює фон для лінійної хвилі. Якщо відстань від поверхні пластини достатньо велика, тобто

$$|\xi| - \delta \gg 1, H_{\text{dc}} \rightarrow 0,$$

то доданки $u_H(\pm\xi)$ прямують до нуля. Тоді, рівняння (2.20) перетворюється на елементарне рівняння гармонічного осцилятора з κ_s у якості

нормованого хвильового числа k_c :

$$\kappa_s = k_c \lambda_c.$$

Оскільки виконується умова (2.11), в будь-якій точці з проміжку $-\delta < \xi < \delta$ ми можемо знехтувати одним із доданків (2.21). Дійсно, перший доданок $u_H(\xi)$ (правий «хвіст» солітона) відмінний від нуля тільки поблизу правої границі ($\xi = \delta$), а другий (лівий «хвіст» солітона) — тільки поблизу лівої ($\xi = -\delta$). Тому рівняння (2.20) можна записати тільки для правої області ($\xi > 0$) у наступному вигляді [12]:

$$f''(x_1)(1 - x_1^2) - 2x_1 f'(x_1) + f(x_1) \left(\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - x_1^2} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Тут:

$$x_1 = \text{th}(\xi - \xi_0), \quad (2.24)$$

$$\mu^2 = -\kappa_s^2, \quad (2.25)$$

$$\nu(1 + \nu) = \frac{2\kappa_s^2}{1 - \Omega^2}.$$

Рівняння (2.23) має точні аналітичні розв'язки, які можна представити в термінах приєднаних функцій Лежандра [109]:

$$f(\xi) = C_1 P_\nu^\mu(x_1) + C_2 Q_\nu^\mu(x_1), \quad (2.26)$$

Для приєднаних функцій Лежандра $P_a^b(z)$ та $Q_a^b(z)$ відомо про наступний

зв'язок [110]:

$$Q_a^b[z] = \frac{e^{i\pi b}\pi}{2\sin(\pi b)}(P_a^b[z] - \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a-b+1)}P_a^{-b}[z]),$$

де $\Gamma[z]$ — гамма-функція. А отже, ми можемо шукати функцію $f(x_1)$ не як суперпозицію $P_\nu^\mu(x_1)$ та $Q_\nu^\mu(x_1)$ (2.26), а як суперпозицію виключно функцій типу P ($P_\nu^\mu[x_1]$ та $P_\nu^{-\mu}[x_1]$), які мають більш очевидний фізичний сенс в цьому конкретному випадку, адже параметр μ має сенс хвильового числа, а для аргументів x_1 , близьких до одиниці,

$$1 - x_1 \ll 1,$$

існує наступний асимптотичний вираз [12]:

$$P_\nu^\mu[x_1] = \frac{2^{\mu/2}}{\Gamma(1-\mu)}(1-x_1)^{-\mu/2}. \quad (2.27)$$

У відповідності з (2.24) та (2.19), для випадків, коли

а) зовнішнє магнітне поле є малим ($h_0 \ll 1$),

та/або

б) відстань від поверхонь пластини є достатньо великою ($\delta - |\xi| \gg 1$), спеціальна функція типу P має асимптотичний вираз (2.27) і, після підставлення параметрів, перетворюється на просту гармонічну функцію:

$$P_\nu^\mu[\text{th}(\xi_0 \pm \xi)] \approx \frac{\exp(\mu\xi_0)}{\Gamma(1-\mu)} \exp(\mp\mu\xi). \quad (2.28)$$

Компоненти електромагнітного поля в пластині ШНП пов'язані з різницею фаз параметра порядку наступним чином [4]:

$$E_z^c = \frac{H_c}{2\omega_J\sqrt{\varepsilon_c}} \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial H_y^c}{\partial x} = \frac{H_c}{2\lambda_c} \left[\sin \varphi + \frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right]. \quad (2.30)$$

Відповідно, нескладно отримати наступні вирази для тангенціальних компонент електричного та магнітного полів через амплітуду $f(\xi)$ хвильового доданка φ_w [12]:

$$E_z^c(\xi) = -\frac{i\Omega H_c}{\sqrt{\varepsilon_c}} f(\xi), \quad (2.31)$$

$$H_y^c(\xi) = \frac{H_c f'(\xi)}{1 - (k_z \lambda_{ab})^2 / (\Omega^2 / \gamma^2 - 1)}. \quad (2.32)$$

Тоді, з урахуванням умови безперервності тангенціальних компонент поля в центрі пластини ШНП ($x = 0$), асимптотичного виразу (2.28) та виразів для компонент (2.31), (2.32), ці компоненти в пластині ШНП можна представити у такому вигляді:

$$E_z^c(\xi) = \frac{i\Omega \kappa_s^2}{\sqrt{\varepsilon_c}(1 - \Omega^2)} [\pm S^\pm f_+(\pm\xi) \pm S^\mp f_-(\pm\xi)], \quad (2.33)$$

$$H_y^c(\xi) = S^\pm f'_+(\pm\xi) + S^\mp f'_-(\pm\xi). \quad (2.34)$$

В останніх формулах верхній знак відповідає області $0 < \xi < \delta$, тобто правій частині пластини ШНП, а нижній — області $-\delta < \xi < 0$, тобто лівій частині, $f_\pm(\xi)$ — нормалізовані приєднані спецфункції Лежандра, а S^\pm — амплітуди поля:

$$f_\pm(\xi) = \frac{P_\nu^\mp \mu [\text{th}(\xi_0 - \xi)]}{\tilde{P}_\mp[h_0] \exp(\mp \mu \delta)}, \quad (2.35)$$

де:

$$\tilde{P}_\pm[z] = \frac{\exp(\pm \mu \text{arcsech}[z])}{\Gamma(\mp \mu)}. \quad (2.36)$$

Нормування проведено для того, щоб в області, де постійне магнітне поле є слабким, похідна $f'(\xi)$ перетворювалась на експоненту, що буде суттєвим для отримання та аналізу трансфер-матриць в наступному розділі. Дійсно, в області $|\xi| \ll \delta$ похідна $f'(\xi)$ (2.35) (а саме похідна входить до магнітної компоненти (2.34)) приймає вигляд

$$f'_{\pm}(\xi) \approx \exp(\pm i\kappa_s \xi), \quad (2.37)$$

а значить в глибині пластини ШНП ці похідні можна інтерпретувати як звичайні біжучі гармонічні хвилі.

Так як ЛХ можуть бути або симетричними, або антисиметричними (через симетрію геометрії задачі), то існує два наступних варіанти для амплітуд S^{\pm} :

$$S^+ = S^-$$

$$S^+ = -S^-$$

Тоді, прирівнюючи відношення полів E_z і H_y на правій границі пластини для ШНП (формули (2.33) і (2.34)) і для вакууму (рівняння (2.17)), отримуємо наступний закон дисперсії ЛХ:

$$\frac{i\Omega\kappa_s^2}{\varepsilon_c(1 - \Omega^2)\sqrt{\gamma^2\kappa_z^2 - \Omega^2/\varepsilon_c}} \frac{f_+(\delta) \pm f_-(\delta)}{f'_+(\delta) \pm f'_-(\delta)} = 1, \quad (2.38)$$

де $\kappa_z = k_z \lambda_{ab}$. Верхній та нижній індекси в (2.38) відповідають симетричним та антисиметричним ЛХ.

Зауважимо, що рівняння (2.20) можна також розв'язати у ВКБ наближенні [12], отримуючи більш прості для аналітичних розрахунків

формули, але такі розв'язки не є коректними для випадку

$$\omega \sim \omega_J,$$

і так як в наступних розділах нас буде цікавити цей діапазон, в якому проявляється нелінійність ДПХ, ми обмежимося «точними» розв'язками в термінах спецфункцій Лежандра.

Зауважимо також, що дисперсійне рівняння (2.38) можна отримати методом трансфер-матриць (тоді, наявність симетричних та антисиметричних власних мод буде просто наслідком рівнянь), що буде зроблено в наступному розділі.

2.2.2 Вплив статичного магнітного поля на закон дисперсії

В цьому підрозділі ми покажемо, як саме магнітне поле H_{dc} впливає на закон дисперсії ЛХ. Воно входить в (2.38) через функції f_{\pm} .

На Рис. 2.8, побудованому для двох варіантів (симетричний та антисиметричний) дисперсійного рівняння (2.38), штрихові та суцільні сині криві відповідають антисиметричним ЛХ при полях $h_0 = H_{dc}/H_c = 0.9$ та $h_0 = 0$, відповідно, а штрихпунктирні та пунктирні червоні криві — симетричним ЛХ при $h_0 = 0.9$ та $h_0 = 0$, відповідно. Стрілки показують збільшення h_0 . Параметри, використані для побудови кривих, були такими: товщина пластини ШНП $\delta = d_c/\lambda_c = 5$, $\varepsilon_c = 15$, параметр анізотропії $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab} = 5$. Чорна лінія під жовтою забороненою областю — світлова лінія $\omega = ck_z$.

На Рис. 2.8 видно, що дисперсія може бути аномальною: дисперсійні криві немонотонні. Дійсно, при малих значеннях хвильового числа k_z , по-

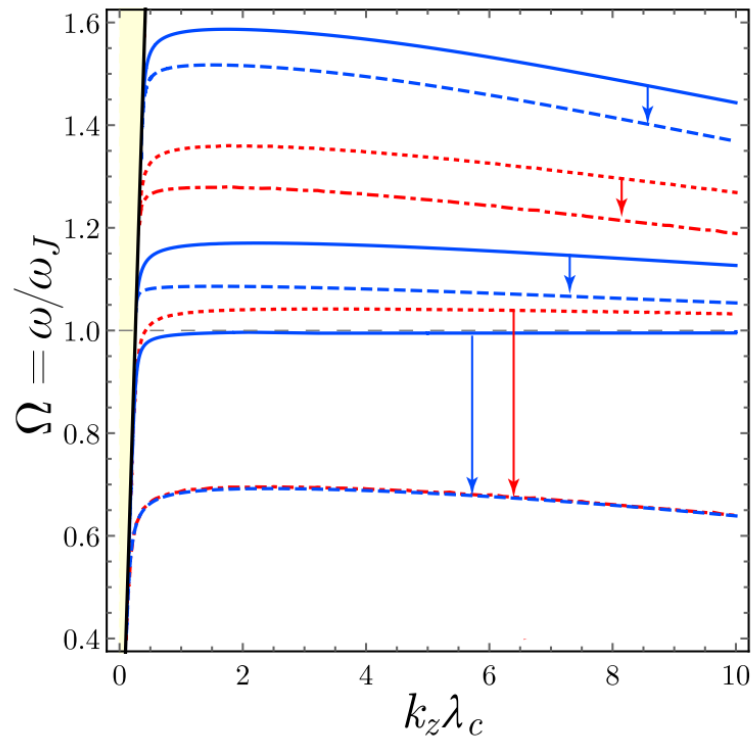


Рис. 2.8 Закон дисперсії ЛХ

близу світлової лінії $\Omega = k_z c/(\omega_J)$, групова швидкість додатна величина,

$$\partial\omega/\partial k_z > 0,$$

тобто дисперсія нормальна, а далі, для більших значень хвильового числа k_z (далі від світлової лінії), криві досягають максимуму, тобто групова швидкість стає нульовою,

$$\partial\omega/\partial k_z = 0,$$

після чого дисперсія є аномальною, тобто групова швидкість виявляється від'ємною:

$$\partial\omega/\partial k_z < 0.$$

Також видно, що в області низьких частот ($\Omega < 1$), дисперсійні криві для симетричної (червона лінія) та для антисиметричної (синя крива) моди зливаються в одну. Це природно, адже в цьому випадку хвиля згасає в пластині ШНП (хвильове число $k_c = \kappa_s/\lambda_c$ у відповідності з (2.22) є уявним в цьому частотному діапазоні) і, відповідно, локалізовані на правій та лівій поверхнях збудження не взаємодіють між собою, тобто ми отримуємо поверхневу моду, аналогічну тій, що виникає для напівнескінченного зразка, досліджену в роботі [96].

Що стосується впливу статичного поля h_0 на криві на Рис. 2.8, видно, що з його збільшенням криві зсуваються вниз і при цьому дещо змінюють кривину (особливо це помітно для поверхневої моди, при $\Omega < 1$). Крива також явно стискається по горизонтальній осі, а отже дещо зсувається до менших значень хвильового числа). Важливо, що для хвилевідних мод ($\Omega > 1$), зміна кривини є не такою суттєвою, і для відносно малих змін Δh_0 зсув кривої виявляється майже паралельним по вертикальній осі. А отже, для цих частот ($\Omega > 1$), ми можемо вважати, що певна зміна поля Δh_0 означає певний зсув кривих на $\Delta\Omega$ в широкій області значень хвильового числа.

Висновки до розділу 2

1. В цьому розділі було розглянуто дві природно найпростіші геометрії для тонкої пластини ШНП, яку поміщено у діелектричне середовище (в нашому випадку — у вакуум): коли надпровідні шари паралельні границі розділу та коли вони їй перпендикулярні. Отримано аналітично закон дисперсії для ЛХ (для поверхневих та хвильоводних мод) в обох випадках та побудовано дисперсійні криві. Розглянуто як поверхневі, так і хвильовідні моди з симетричним і антисиметричним розподілом поля відносно середини пластини.
2. В першій геометрії дисперсія хвиль в області частот, що значно відрізняються від ДПЧ ω_J , є нормальною, тобто дисперсійна крива на діаграмі хвильове число-частота, (k_x, ω) , є монотонно зростаючою функцією. Але в області частот близьких до ω_J , в якій для цієї геометрії необхідно врахувати ефект порушення електронеутральності шарів надпровідника (ємнісний міжшаровий зв'язок), дисперсія може бути аномальною. Більш того, порушення електронеутральності призводить також до інших цікавих наслідків: виникнення додаткової забороненої зони в фазовому просторі (k_x, ω) , ширина якої асимптотично пропорційна квадратному кореню з коефіцієнта порушення електронеутральності, та виродження спектра для деяких параметрів.
3. В другій геометрії, дисперсія хвиль може бути аномальною в широкому діапазоні частот. Показано, як можна впливати на закон дисперсії, змінюючи зовнішнє статичне магнітне поле. Для великих частот ($\omega > \omega_J$) збільшення величини поля відповідає майже паралельному «зсуву» дисперсійних кривих вниз по осі ω , тобто збільшення поля ефективно відповідає зменшенню частоти, а для малих ($\omega < \omega_J$) — також збільшенню

кривини кривих, що призводить до певного їхнього «зсуву» вліво по осі k_x , тобто збільшення поля ефективно відповідає зменшенню частоти і хвильового числа.

РОЗДІЛ 3

РЕЗОНАНСНА ПРОЗОРІСТЬ ПЛАСТИНИ ШНП ДЛЯ ПЛОСКОЇ ХВИЛІ

В цьому розділі теоретично досліджено резонансне проходження ТГц електромагнітних хвиль крізь пластину шаруватого надпровідника та розглянуто можливість керування цим явищем за допомогою слабого зовнішнього постійного магнітного поля.

В цьому розділі представлено результати, опубліковані в роботах [11, 13, 15, 16, 22].

3.1 Модель

Пластина ШНП товщини $d_c = 2x_b$ (товщина d_c відповідає умові (2.11)) поміщено в діелектричне середовище з проникністю ε_a та відокремлено від нього тонкими просторовими проміжками з діелектричною проникністю $\varepsilon_b < \varepsilon_a$ та з товщиною $d_b = x_a - x_b$, див. Рис. 3.1 (тут: $x_a = x_{a_R} = -x_{a_L}$, $x_b = x_{b_R} = -x_{b_L}$). Шари пластини ШНП перпендикулярні поверхням $x = x_{b_L}$ та $x = x_{b_R}$. Наявне слабе постійне магнітне поле H_{dc} , величина якого відповідає умові (2.12). В області a_L під кутом θ до поверхні $x = x_{a_L}$ на систему падає ТМ-поляризована ЕМ хвиля частоти ω (2.13). Ця геометрія відповідає геометрії, розглянутій в попередньому підрозділі (див. Рис. 2.6), але тепер ми маємо додаткові діелектричні прошарки з обох боків пластини ШНП. Наявність цих двох додаткових прошарків, менш оптично щільних, ніж середовища a_L та a_R з ε_a , забезпечує можливість збудження розглянутих в попередньому розділі ЛХ при кутах опромінювання, більших ніж кут повного внутрішнього

відбиття (1.16), тому ми досліджуємо саме такі кути падіння:

$$\theta > \theta_b \quad (3.1)$$

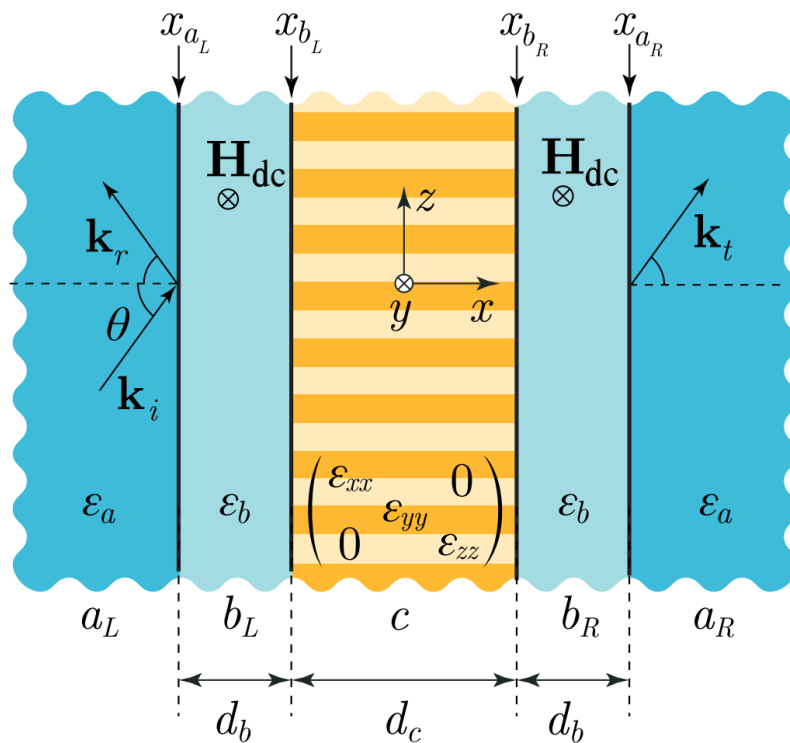


Рис. 3.1 Геометрія задачі

Запишемо вирази для компонент поля електромагнітної хвилі (2.13) в цій задачі. Для діелектричних областей a_L , a_R , b_L та b_R з рівнянь Максвелла нескладно отримати напруженості магнітного та електричного полів у вигляді

$$H_y^a(x) = A^+ e^{ik_a(x \pm x_a)} + A^- e^{-ik_a(x \pm x_a)}, \quad (3.2)$$

$$H_y^b(x) = B^+ e^{ik_b(x \pm x_b)} + B^- e^{-ik_b(x \pm x_a)}, \quad (3.3)$$

$$E_z^a(x) = \frac{-k_a}{\varepsilon_a k_0} \left[A^+ e^{ik_a(x \pm x_a)} - A^- e^{-ik_a(x \pm x_a)} \right], \quad (3.4)$$

$$E_z^b(x) = \frac{-k_b}{\varepsilon_b k_0} \left[B^+ e^{ik_b(x \pm x_b)} - B^- e^{-ik_b(x \pm x_b)} \right]. \quad (3.5)$$

Тут: A^\pm і B^\pm — амплітуди падаючих і відбитих ЕМ хвиль, а верхні та нижні знаки \pm в виразах (3.2), (3.3), (3.4) та (3.5), відповідають лівим (a_L , b_L) та правим (a_R , b_R) областям, відповідно. x -проекції хвильового вектора в цих областях, k_a і k_b , мають вигляд:

$$k_a = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_a - k_z^2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \cos \theta, \quad (3.6)$$

$$k_b = i\kappa_b, \quad \kappa_b = \sqrt{k_z^2 - k_0^2 \varepsilon_b} = k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_b}. \quad (3.7)$$

Тут:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

Принципово, що хвильове число k_a (3.6) в даній задачі є дійсним, а k_b (3.7) — уявним, через умову (3.1); величина κ_b при цьому є дійсною.

Компоненти ЕМ поля в пластині ШНП вже було отримано в попередньому розділі. Нагадаємо, що вирази (2.33) та (2.34) для цих компонент мають структуру, подібну до виразів (3.2), (3.3), (3.4) та (3.5), якщо виконується умова слабкості постійного магнітного поля:

$$H_{dc}/H_c \ll 1$$

та/або

$$|x| - x_b \gg \lambda_c. \quad (3.8)$$

3.2 Модифікація методу трансфер-матриць

Проходження ТГц хвилі через систему буде описано в формалізмі трансфер-матриць, що показують, як змінюються амплітуди компоненти магнітного поля H_y після проходження ТГц хвилі через систему:

$$\begin{pmatrix} A_R^+ \\ A_R^- \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{++} & M_{+-} \\ M_{-+} & M_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_L^+ \\ A_L^- \end{pmatrix}.$$

Іншими словами, трансфер-матриця \hat{M} пов'язує амплітуди падаючої (A_L^+, A_L^-) і вихідної (A_R^+, A_R^-) хвиль (див. Рис. 3.2).

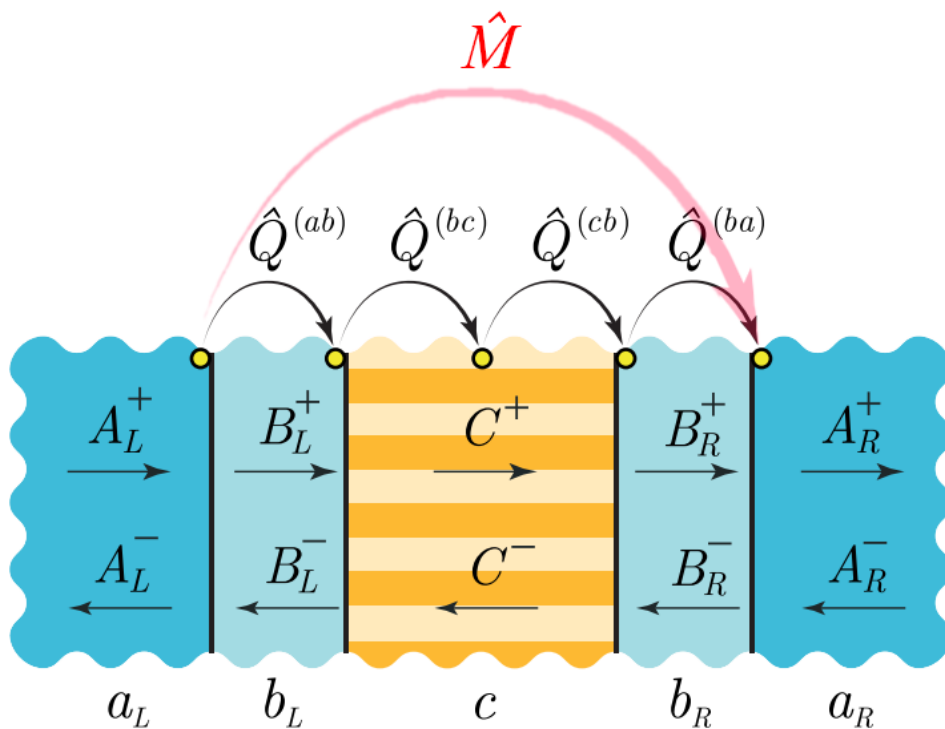


Рис. 3.2 Основні трансфер-матриці

В області $x \in (x_{b_L}, x_{b_R})$, де магнітне поле $H_{dc} \neq 0$, ЕМ хвиля (2.33), (2.34) в пластині ШНП не описується експоненціальними функціями. Це, очевидно, принципово ускладнює безпосереднє застосування трансфер-матричного методу, адже на поверхнях $x = \pm x_b$ зі сторін ШНП нема явних амплітуд перед відповідними експонентами. Проте, як було зазначено, глибоко всередині пластини ШНП, де виконується умова (3.8) і постійне магнітне поле є слабким, компонента $H_y(x)$ може бути розглянута як суперпозиція плоских хвиль, що біжать в додатному та від'ємному напрямку осі x , відповідно до асимптотичного виразу (2.28). Тому ми вводимо дві додаткові матриці $\hat{Q}^{(bc)}$ та $\hat{Q}^{(cb)}$ (див. Рис. 3.2), які відповідають переходу з краю лівого діелектрика $x = -x_b - \epsilon$ до центру $x = 0$ та від нього до правого діелектрика $x = x_b + \epsilon$ (тут параметр $\epsilon \rightarrow +0$). Такий підхід дозволить записати трансфер-матриці навіть для нашого негармонічного на границях випадку та, в рамках матричного формалізму, проаналізувати наслідки включення постійного магнітного поля. А отже, (див. Рис. 3.2) головна трансфер-матриця \hat{M} представляється як добуток двох матриць $\hat{Q}^{(ab)}$ і $\hat{Q}^{(ba)}$ (ці дві матриці описують перехід хвилі через границі діелектриків $x = \pm x_a$ та проходження через просторові проміжки b) та двох матриць $\hat{Q}^{(bc)}$ і $\hat{Q}^{(cb)}$ (ці дві матриці відповідають поширенню хвилі в ШНП і проходженню через границі $x = \pm x_b$):

$$\hat{M} = \hat{Q}^{(ba)} \hat{Q}^{(cb)} \hat{Q}^{(bc)} \hat{Q}^{(ab)}. \quad (3.9)$$

Матриці $\hat{Q}^{(ab)}$ і $\hat{Q}^{(ba)}$ можна представити як добутки елементарних матриць $\hat{M}^{(ab)}$ та $\hat{M}^{(ba)}$, що відповідають за перехід через відповідні границі розділу $x = \pm x_a$, і матриці $\hat{M}^{(b)}$, яка описує вільне поширення

в діелектрику b [9]:

$$\hat{Q}^{(ab)} = \hat{M}^{(b)} \hat{M}^{(ab)}, \quad (3.10)$$

$$\hat{Q}^{(ba)} = \hat{M}^{(ba)} \hat{M}^{(b)}. \quad (3.11)$$

Далі подібне розкладання буде також отримано для матриць $\hat{Q}^{(bc)}$ і $\hat{Q}^{(cb)}$. Буде також отримано спеціальну матрицю, що відповідає саме за наявності статичного магнітного поля, яка не залежить від інших параметрів задачі (від діелектрика на границі — тобто діелектричної проникності ε_b та від товщини пластини ШНП). Ці параметри буде включено в формально подібні для випадку діелектриків матриці, в яких не буде слідів статичного магнітного поля, і які б описували цю систему за його відсутності.

3.2.1 Трансфер-матриці для діелектриків

Матриці, що описують перехід через границі діелектриків $x = -x_a$ та $x = x_a$, матриці $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)}$ відповідно, є добре відомими, і їх нескладно отримати з вищенаведених виразів для тангенціальних компонент поля H_y та E_z (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), врахувавши умови їхньої рівності на поверхнях $x = \pm x_a$:

$$\hat{M}^{(ab)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \eta & 1 - \eta \\ 1 - \eta & 1 + \eta \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\hat{M}^{(ba)} = \hat{M}^{(ab)^{-1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\eta} & 1 - \frac{1}{\eta} \\ 1 - \frac{1}{\eta} & 1 + \frac{1}{\eta} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Тут:

$$\eta = \frac{k_a \varepsilon_b}{k_b \varepsilon_a}.$$

Відзначимо, що справедливими є такі співвідношення:

$$\det \hat{M}^{(ab)} = \eta,$$

$$\det \hat{M}^{(ba)} = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\det \hat{M}^{(ab)}}.$$

Те, що ці матриці є взаємно оберненими, є очевидним наслідком симетрії системи.

Аналогічно, з виразів (3.3) і (3.5) можна отримати матрицю $\hat{M}^{(b)}$, яка відповідає поширенню хвилі від $x = -x_a$ до $x = -x_b$ та від $x = x_b$ до $x = -x_a$ в діелектрику b :

$$\hat{M}^{(b)} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_b} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_b} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

де:

$$\phi_b = k_b d_b = i d_b k_0 \sqrt{\varepsilon_a} \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_b}. \quad (3.15)$$

Відзначимо, що

$$\det \hat{M}^{(b)} = 1.$$

Ці два переходи, на відміну від попередніх двох, описуються однаковими,

а не оберненими як в (3.12) та (3.2.2), матрицями, адже проходячи через обидва проміжки b_R та b_L , ЕМ хвиля отримує однаковий зсув фази ϕ_b (3.15). А отже, існує тільки одна трансфер-матриця $\hat{M}^{(b)}$, що відповідає обом проміжкам b_R та b_L .

3.2.2 Трансфер-матриці для шаруватого надпровідника

Випадок нульового статичного поля

Якби поле хвилі в пластині ШНП описувалося б гармонічними (експоненціальними) функціями, тобто за відсутності поля H_{dc} , матриці для пластини ШНП (поширення всередині та проходження через границю) мали б такий самий вигляд і аналогічний фізичний зміст, що і вищенаведені матриці для діелектриків (3.12), і (3.14) (але з урахуванням анізотропії тензора діелектричної проникності (1.10), (1.11) [9]). В цьому випадку доданок η , який входить до компонент матриць $\hat{M}^{(ab)}$ і $\hat{M}^{(ba)}$ в (3.12) та , мав би такий вигляд:

$$\eta_c = \frac{k_b \varepsilon_{zz}}{k_c \varepsilon_b}, \quad (3.16)$$

а зсув фази ϕ_b , що входить до $\hat{M}^{(b)}$ (3.14), відповідно, перетворився б на

$$\phi_c = k_c d_c,$$

Відповідно, за умови $H_{dc} = 0$ матриці переходу через границю $\hat{M}_0^{(bc)}$ та $\hat{M}_0^{(cb)}$ і матриця поширення в пластині ШНП $\hat{M}_0^{(c)}$ мали б наступний вигляд:

$$\hat{M}_0^{(bc)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \eta_c & 1 - \eta_c \\ 1 - \eta_c & 1 + \eta_c \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\hat{M}_0^{(cb)} = \hat{M}_0^{(bc)^{-1}}, \quad (3.18)$$

$$\hat{M}_0^{(c)} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_c} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_c} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Далі буде показано, що ці матриці (3.17) і (3.19) можна відокремити і для випадку ненульового поля $H_{dc} \not\rightarrow 0$.

Випадок ненульового статичного поля

Як було зазначено вище, через негармонічність виразів для полів поблизу поверхонь пластини ШНП (2.33), (2.34), ми будемо шукати матриці $\hat{Q}^{(bc)}$ та $\hat{Q}^{(cb)}$ (див. Рис. 3.2), які визначають перехід з лівого діелектрика до центру пластини ШНП та від нього до правого діелектрика.

Залишемо матричні співвідношення, яким мають підкорятися амплітуди поля H_y : S^\pm в центрі пластини ШНП і B_L^\pm та B_R^\pm на границях

діелектрика:

$$\begin{pmatrix} S^+ \\ S^- \end{pmatrix} = \hat{Q}^{(bc)} \begin{pmatrix} B_L^+ \\ B_L^- \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ B_R^- \end{pmatrix} = \hat{Q}^{(cb)} \begin{pmatrix} S^+ \\ S^- \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Компоненти матриць $\hat{Q}^{(bc)}$ та $\hat{Q}^{(cb)}$ будемо шукати з наступних ГУ при $x = \pm x_b$:

$$H_y^c(-x_b) = H_y^b(-x_b), \quad E_z^c(-x_b) = E_z^b(-x_b), \quad (3.23)$$

$$H_y^c(x_b) = H_y^b(x_b), \quad E_z^c(x_b) = E_z^b(x_b). \quad (3.24)$$

Нескладно показати, що ці ГУ для тангенціальних компонент поля на границях $x = \pm x_b$ діелектрика (3.2), (3.3), (3.4) та (3.5) та ШНП (2.33), (2.34) можуть бути переписані як:

$$\begin{cases} S^+ f'_-(\delta) + S^- f'_+(\delta) = B_L^+ + B_L^- \\ S^+ f_-(\delta) + S^- f_+(\delta) = p(B_L^- - B_L^+) \end{cases}, \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} S^+ f'_+(\delta) + S^- f'_-(\delta) = B_R^+ + B_R^- \\ S^+ f_+(\delta) + S^- f_-(\delta) = p(B_R^+ - B_R^-) \end{cases}, \quad (3.26)$$

де виділено безрозмірний параметр:

$$p = \frac{ik_b \sqrt{\varepsilon_s} (1 - \Omega^2)}{\Omega \varepsilon_b k_0 \kappa_s^2}.$$

Використовуючи (2.22), (1.11), (3.16) і (3.7), можна переписати останній параметр як:

$$p = \frac{1}{i\kappa_s} \frac{k_b \varepsilon_{zz}}{k_c \varepsilon_b} = \frac{\eta_c}{\mu}.$$

Враховуючи також наступне важливе співвідношення для комбінацій функцій $f_{\pm}(\xi)$ та їхніх похідних, взятих на границі пластини ШНП ($\xi = \delta = d_c/2\lambda_c = x_b/\lambda_c$), що, як можна показати [11], випливає з властивостей приєднаних функцій Лежандра,

$$f_+(\delta)f'_-(\delta) - f'_+(\delta)f_-(\delta) = \frac{2}{\mu},$$

та підставляючи відповідні амплітуди, виражені через матричні компоненти $Q_{\pm\pm}^{(cb)}$ та $Q_{\pm\mp}^{(cb)}$ (3.20), (3.22) в ГУ (3.25), (3.26), можна отримати наступні матричні вирази:

$$\hat{Q}^{(bc)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta_c f'_+(\delta) + \mu f_+(\delta) & -\eta_c f'_+(\delta) + \mu f_+(\delta) \\ -\eta_c f'_-(\delta) - \mu f_-(\delta) & \eta_c f'_-(\delta) - \mu f_-(\delta) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\hat{Q}^{(cb)} = \frac{1}{2\eta_c} \begin{pmatrix} \eta_c f'_+(\delta) + \mu f_+(\delta) & \eta_c f'_-(\delta) + \mu f_-(\delta) \\ \eta_c f'_+(\delta) - \mu f_+(\delta) & \eta_c f'_-(\delta) - \mu f_-(\delta) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Нагадаємо, що параметр μ (2.25) має сенс хвильового числа, а параметр η_c входить в матриці переходу через границю з пластиною ШНП при нульовому полі (3.17) і (3.19).

Ці матриці (на відміну від матриць діелектриків) не є взаємно

оберненими,

$$\hat{Q}^{(bc)} \neq \hat{Q}^{(cb)^{-1}}$$

але добуток їхніх детермінантів дорівнює одиниці, адже

$$\det \hat{Q}^{(cb)} = \eta_c \equiv \frac{k_b \varepsilon_{zz}}{k_c \varepsilon_b},$$

$$\det \hat{Q}^{(bc)} = \frac{1}{\eta_c}.$$

3.2.3 Факторизація та аналіз трансфер-матриць для шаруватого надпровідника

В цьому підрозділі проаналізовано трансфер-матриці (3.27), (3.28). Зокрема, ці матриці буде факторизовано.

Наближення малого поля

У випадку слабкого зовнішнього постійного магнітного поля ($H_{dc} \rightarrow 0$) матриці $\hat{Q}^{(bc)}$ та $\hat{Q}^{(cb)}$ (3.27), (3.28) можна легко факторизувати, представивши їх у вигляді добутоків матриць $\hat{M}_0^{(cb)}$, $\hat{M}_0^{(bc)}$ та $\hat{M}_0^{(c)}$ (3.17) і (3.19), які отримуються для нульового поля ($H_{dc} = 0$). Відповідно до (2.28) ми маємо:

$$f_{\pm}(\delta)|_{H_{dc} \rightarrow 0} = \pm \frac{1}{i\kappa_s} e^{\pm i\kappa_s \delta}, \quad (3.29)$$

$$f'_{\pm}(\delta)|_{H_{dc} \rightarrow 0} = e^{\pm i\kappa_s \delta}. \quad (3.30)$$

Тоді, легко побачити, що

$$\hat{Q}^{(cb)}|_{H_{dc} \rightarrow 0} = \hat{M}_0^{(cb)} \hat{M}_0^{(c/2)}, \quad (3.31)$$

$$\hat{Q}^{(bc)}|_{H_{dc} \rightarrow 0} = \hat{M}_0^{(c/2)} \hat{M}_0^{(bc)}. \quad (3.32)$$

Отже, має місце повне узгодження з попередніми роботами (з $H_{dc} = 0$) [9]. Тут матриця $\hat{M}_0^{(c/2)}$ відповідає проходженню через «половину» пластини ШНП, тобто це та сама матриця M_0^c , тільки з половинним аргументом експоненти:

$$\hat{M}^{(H_{dc}^L)} = \hat{M}^{(c/2)^{-1}} \hat{Q}^{(bc)} \hat{M}^{(bc)^{-1}}, \quad (3.33)$$

$$\hat{M}^{(H_{dc}^R)} = \hat{M}^{(cb)^{-1}} \hat{Q}^{(cb)} \hat{M}^{(c/2)^{-1}}. \quad (3.34)$$

Факторизація при більших полях

При більших полях, коли $H_{dc} \not\rightarrow 0$, факторизація не настільки очевидна, але вона також може бути проведена, і в результаті цієї операції можна знайти специфічні матриці, що описують саме вплив магнітного поля.

На Рис. 3.3 показано матриці, на які можна факторизувати основні матриці, отримані вище. Червоною лінією схематично показано розподіл статичного магнітного поля в пластині ШНП.

Як було зазначено вище, зовнішнє магнітне поле H_{dc} проникає в пластину ШНП неоднорідно (див. Рис. 3.3), так що воно значно взаємодіє з ДПХ тільки біля поверхонь зразка. Тому здається природним переписати

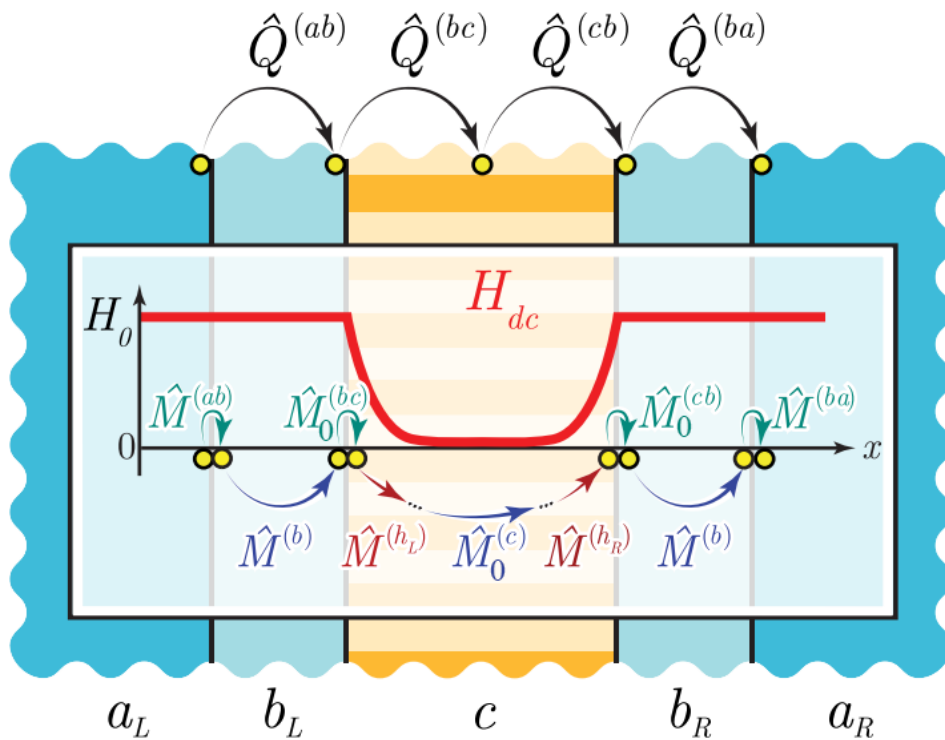


Рис. 3.3 Факторизація основних матриць

матриці $\hat{Q}^{(bc)}$ та $\hat{Q}^{(cb)}$ у наступному вигляді:

$$\hat{Q}^{(bc)} = \hat{M}_0^{(c/2)} \hat{M}^{(H_{dc}^L)} \hat{M}_0^{(bc)}, \quad (3.35)$$

$$\hat{Q}^{(cb)} = \hat{M}_0^{(cb)} \hat{M}^{(H_{dc}^R)} \hat{M}_0^{(c/2)}. \quad (3.36)$$

Відповідно до (3.35) і (3.36), матриці $\hat{M}^{(H_{dc}^R)}$ та $\hat{M}^{(H_{dc}^L)}$ можна знайти, просто домноживши матриці, що ми маємо, на відповідні обернені матриці «нульового поля» справа та зліва:

$$\hat{Q}^{(bc)} = \hat{M}_0^{(c/2)} \hat{M}^{(H_{dc}^L)} \hat{M}_0^{(bc)}, \quad (3.37)$$

$$\hat{Q}^{(cb)} = \hat{M}_0^{(cb)} \hat{M}^{(H_{dc}^R)} \hat{M}_0^{(c/2)}. \quad (3.38)$$

Тоді, після відповідних перетворень, для компонент матриць «хвостів»

магнітного вихору $\hat{M}^{(H_{\text{dc}}^L)}$ та $\hat{M}^{(H_{\text{dc}}^R)}$, одержимо:

$$M_{\pm\pm}^{(H_{\text{dc}}^L)} = M_{\pm\pm}^{(H_{\text{dc}}^R)} = \hat{a}_-[P_\nu^\mp, \tilde{P}_\mp], \quad (3.39)$$

$$M_{\pm\mp}^{(H_{\text{dc}}^L)} = -M_{\mp\pm}^{(H_{\text{dc}}^R)} = \hat{a}_+[P_\nu^\mp, \tilde{P}_\mp], \quad (3.40)$$

де введено наступний оператор:

$$\hat{a}_\pm[f_1, f_2] = \frac{\pm h_0^2}{2(f_2[h_0])^{1\mp1}} \frac{\partial}{\partial h'} \left(\frac{f_1[h']}{(f_2[\sqrt{1-h'^2}])^{\pm1}} \right) \Big|_{h'=\sqrt{1-h_0^2}}. \quad (3.41)$$

Тут $\tilde{P}_\pm[h']$ введені для нормування функції виду (2.36), а $P_\nu^{\pm\mu}[h']$ — P -функції Лежандра, $M_{\pm\pm}, M_{\mp\pm}$ — матричні компоненти матриці \hat{M} :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M_{++} & M_{+-} \\ M_{-+} & M_{--} \end{pmatrix}.$$

Неважко показати, що детермінанти матриць «хвостів» магнітних вихорів дорівнюють одиниці:

$$\det \hat{M}^{(H_{\text{dc}}^L)} = \det \hat{M}^{(H_{\text{dc}}^R)} = 1.$$

Ці матриці показують вплив статичного поля на проходження хвилі. Вони відображають взаємодію ДПХ з «хвостом» магнітного вихору поблизу поверхонь (див. Рис. 3.3).

Для малого поля ($H_{\text{dc}}, h_0 \rightarrow 0$), відповідно до асимптотичного виразу (2.28), маємо:

$$P_\nu^\mp[h'] \Big|_{h' \rightarrow 1} \approx \pm \frac{K_\mp[\sqrt{1-h'^2}]}{\mu}. \quad (3.42)$$

Підставивши (3.42) в (3.39) і (3.40), можна показати, що при $h_0 \rightarrow 0$ позадіагональні компоненти $M_{\pm\mp}^{(H_{\text{dc}}^L)}$ та $M_{\pm\mp}^{(H_{\text{dc}}^R)}$ в (3.39) прямують до нуля,

тому що згідно з (3.41) ми маємо константу під похідною, а діагональні компоненти $M_{\pm\pm}^{(H_{dc}^L)}$ та $M_{\pm\pm}^{(H_{dc}^R)}$ (3.39) прямують до одиниці, адже:

$$\frac{\partial}{\partial h'} (K_{\pm}[1 - h'^2])^2 = \frac{2\mu (K_{\pm}[1 - h'^2])^2}{h'^2 - 1}.$$

А отже можна побачити, що трансфер-матриці, які відповідають за взаємодію з «хвостом» магнітного вихору $\hat{M}^{(H_{dc}^L)}$ та $\hat{M}^{(H_{dc}^R)}$, при малому полі $h_0 \rightarrow 0$, прямують до одиничної матриці:

$$M^{(H_{dc}^L)}|_{h_0 \rightarrow 0} = M^{(H_{dc}^R)}|_{h_0 \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це очікувано, адже нульове поле має відповідати відсутності цих матриць.

Особливо цікаво, що одержані матриці $\hat{M}^{(H_{dc}^L)}$ та $\hat{M}^{(H_{dc}^R)}$ (3.39), (3.40) «хвостів» вихорів не залежать ані від середовища (діелектричної проникності ε_b), ані від товщини пластини ШНП. Компоненти цих матриць залежать тільки від значення поля $h_0 = H_{dc}/H_c$ і, звичайно, від параметрів, визначаючих хвильове число: від частот $\Omega = \omega/\omega_J$ та від кута падіння θ . В той самий час поле h_0 не входить в компоненти матриць $\hat{M}_0^{(bc)}$, $\hat{M}_0^{(cb)}$ і $\hat{M}_0^{(c)}$. А отже, факторизуючи матриці $\hat{Q}^{(cb)}$ і $\hat{Q}^{(bc)}$, вдалося виділити матриці, що містять всю інформацію про магнітне поле і не пов'язані ані з діелектриком, ані з пластиною ШНП як такою — лише з поверхнею цієї пластини, біля якої присутній «хвост» джозефсонівського вихору.

Використання матриць «хвоста» джозефсонівського вихору може значно спростити аналітичне розв'язання широкого спектра задач на проходження ТГц хвилі через складні системи, що можуть містити декілька (не обов'язково однакових) пластин ШНП з різними параметрами, якщо в системі наявне зовнішнє магнітне поле як інструмент налаштування коефіцієнтів проходження та відбиття.

3.3 Пропускання та відбиття

Перш ніж перейти до аналізу коефіцієнтів пропускання та відбиття, розглянемо закони дисперсії локалізованих хвиль в термінах трансфер-матричного підходу.

3.3.1 Закон дисперсії ЛХ

Як вже було зазначено, резонансна прозорість системи виникає через збудження ЛХ, які швидко загасають в діелектрику b при віддаленні від поверхонь. Нижче ми ще раз отримаємо закон дисперсії ЛХ (2.38) в раках трансфер-матричного методу і покажемо, як виникають симетричні та антисиметричні розв'язки.

Так як хвильове число k_b (3.7) уявне за умовою задачі, то для локалізації на пластині ШНП, очевидно, необхідно і достатньо (див. Рис. 3.2) виконання наступних рівностей:

$$B_L^+ = 0, \quad B_R^- = 0.$$

Тоді умова локалізації хвилі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} B_R^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{Q}^{(cb)} \hat{Q}^{(bc)} \begin{pmatrix} 0 \\ B_L^- \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Нескладно показати, що рівняння (3.43) має нетривіальний розв'язок, тільки якщо

$$Q_{-+}^{(cb)} Q_{+-}^{(bc)} + Q_{--}^{(cb)} Q_{--}^{(bc)} = 0. \quad (3.44)$$

Скориставшись виразами (3.27), (3.28) для матричних компонент $\hat{Q}^{(cb)}$ і $\hat{Q}^{(bc)}$ і провівши всі необхідні перетворення, можна переписати умову (3.44) у вигляді:

$$D_{\text{disp}} = [\mu f_{\text{sym}}(\delta) - \eta_c f'_{\text{sym}}(\delta)] [\mu f_{\text{asym}}(\delta) - \eta_c f'_{\text{asym}}(\delta)] = 0, \quad (3.45)$$

де

$$f_{\text{asym}}(\xi) = f_-(\xi) - f_+(\xi), \quad (3.46)$$

$$f_{\text{sym}}(\xi) = f_-(\xi) + f_+(\xi). \quad (3.47)$$

У відповідності з (2.37) для середини пластини, очевидно, що функції $f_{\text{sym}}(\xi)$ та $f_{\text{asym}}(\xi)$ дають симетричні

$$f'_{\text{sym}}(-\xi) = f'_{\text{sym}}(\xi), \quad (3.48)$$

$$f_{\text{sym}}(-\xi) = f_{\text{sym}}(\xi), \quad (3.49)$$

та антисиметричні

$$f'_{\text{asym}}(-\xi) = -f'_{\text{asym}}(\xi), \quad (3.50)$$

$$f_{\text{asym}}(-\xi) = -f_{\text{asym}}(\xi), \quad (3.51)$$

за магнітним полем H_y моди.

Рівняння (3.45) включає частоту Ω і хвильове число κ_z , а отже воно визначає закон дисперсії $\Omega(\kappa_z)$. Очевидно, що закон дисперсії (3.45) можна розбити на два:

$$\mu f_{\text{sym}}(\delta) = \eta_c f'_{\text{sym}}(\delta), \quad (3.52)$$

$$\mu f_{\text{asym}}(\delta) = \eta_c f'_{\text{asym}}(\delta). \quad (3.53)$$

Причому перший, (3.52), визначає симетричні ЛХ, а другий, (3.53), — антисиметричні.

Нескладно показати, що співвідношення (3.52) та (3.53), які одержано трансфер-матричним методом, дають результат, ідентичний з отриманим в попередньому розділі (2.38).

3.3.2 Коефіцієнти пропускання та відбиття

Коефіцієнт пропускання можна виразити через матричний елемент M_{--} загальної матриці M (3.9), що визначає трансфер хвилі через усю систему [111]:

$$T = \frac{1}{|M_{--}|^2}. \quad (3.54)$$

Ця трансфер-матриця \hat{M} є T -інваріантною (тобто симетричною відносно заміни t на $-t$), якщо в системі відсутня дисипація. І тоді існує зв'язок [111]:

$$M_{+-} = M_{-+}^*, M_{--} = M_{++}^*. \quad (3.55)$$

Зірочка позначає комплексне спряження.

Враховуючи значення детермінанта цієї загальної матриці \hat{M} , який дорівнює добутку всіх детермінантів:

$$\det \hat{M} = \det \hat{Q}^{(ba)} \det \hat{Q}^{(cb)} \det \hat{Q}^{(bc)} \det \hat{Q}^{(ab)} = 1,$$

а також рівності (3.55), вищенаведений вираз для коефіцієнта пропускання (3.54) може бути переписано в зручнішому для подальшого аналізу

вигляді:

$$T = \frac{1}{1 + |M_{+-}|^2}. \quad (3.56)$$

З останньої формули очевидно, що умовою абсолютної резонансної прозорості ($T = 1$) є:

$$M_{+-} = 0.$$

Коефіцієнт відбиття, відповідно, має вигляд:

$$R = 1 - T = \frac{1}{1 + |M_{+-}|^2}. \quad (3.57)$$

Матричну компоненту M_{+-} , після перемноження всіх матриць \hat{Q} , з яких складається \hat{M} , можна представити як

$$\begin{aligned} M_{+-} = & \frac{\eta - \eta^{-1}}{16\eta_c} \left[\exp(\psi_b)(\eta_c f'_{\text{sym}}(\delta) - \mu f_{\text{sym}}(\delta))(\eta_c f'_{\text{asym}}(\delta) - \mu f_{\text{asym}}(\delta)) \right. \\ & + 2 \frac{\eta + \eta^{-1}}{\eta - \eta^{-1}} (\eta_c^2 f'_{\text{sym}}(\delta) f'_{\text{asym}}(\delta) - \mu^2 f_{\text{sym}}(\delta) f_{\text{asym}}(\delta)) \\ & \left. + \exp(-\psi_b)(\eta_c f'_{\text{sym}}(\delta) + \mu f_{\text{sym}}(\delta))(\eta_c f'_{\text{asym}}(\delta) + \mu f_{\text{asym}}(\delta)) \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Тут введено дійсний додатний параметр ψ_b ,

$$\psi_b = -2i\phi_b > 0, \quad (3.59)$$

який є мірою зсуву фази (3.15) при проходженні через діелектрик b , іншими словами — мірою згасання хвилі в діелектрику b .

Очевидно, що при достатньо сильному згасанні в діелектрику b сумарне пропускання може бути виключно резонансним — коли збуджуються ЛХ. Тому для спостереження резонансних явищ необхідно, щоб цей

параметр (3.59) був достатньо великим,

$$\exp(-\psi_b) \ll 1. \quad (3.60)$$

Якщо виконується умова (3.60), то у виразі (3.58) можна залишити лише перший доданок в дужках, тобто ми маємо асимптотичний вираз для матричної компоненти M_{+-} :

$$\begin{aligned} M_{+-} &\approx \frac{\eta - \eta^{-1}}{16\eta_c} (\eta_c f'_{\text{sym}}(\delta) - \mu f_{\text{sym}})(\eta_c f'_{\text{asym}}(\delta) - \mu f_{\text{asym}}) \\ &= D_{\text{disp}} \exp(\psi_b) \frac{\eta - \eta^{-1}}{16\eta_c}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Тут бачимо множник D_{disp} , рівність якого нулю є умовою локалізації хвиль (3.45). Очевидно, що якщо

$$D_{\text{disp}} \not\approx 0,$$

тобто умова локалізації не виконана (далеко від резонансу), з урахуванням (3.60) отримуємо:

$$M_{+-} \gg 1,$$

а значить, відповідно до (3.56) та (3.57),

$$T \approx 0, \quad R \approx 1.$$

Тобто далеко від резонансу спостерігається повне відбиття (відсутнє пропускання).

Якщо ж навпаки, всі параметри задачі такі, що дисперсійне співвід-

ношення (3.45) виконується (близько до резонансу), маємо:

$$D_{\text{disp}} \approx 0,$$

компонента M_{+-} , відповідно, задовільнює умові

$$M_{+-} \ll 1,$$

а значить, відповідно до (3.56) та (3.57),

$$T \approx 1, \quad R \approx 0.$$

Тобто відбувається значне резонансне підсилення пропускання (або послаблення відбиття) завдяки збудженню ЛХ на пластині ШНП.

На Рис. 3.4 представлено залежність коефіцієнту пропускання T від кута падіння θ та нормованої частоти $\Omega = \omega/\omega_J$, отриману за формулою (3.56). Червоним і жовтим показано дисперсійні криві для симетричних і антисиметричних ЛХ, відповідно. На вставці показано інший частотний діапазон. Параметри $h_0 = H_{\text{dc}}/H_c = 0.5$, товщина зазору $d_b = 0.5\lambda_c$, $\varepsilon_a = 20$, $\varepsilon_b = 1$, інші параметри такі ж, як на Рис. 2.8.

Видно, що темні області (відповідають пропусканню) нагадують дисперсійні криві (червоні та жовті лінії для симетричних та антисиметричних ЛХ). Особливо схожі ці області на відповідні криві для вищих частот (див. вставку на 3.4).

Видно також, що діапазон частот, для яких ця система виявляється прозорою, є значно вузьким для більших кутів θ , під яким хвиля падає на систему. Це легко пояснюється геометрично: більші кути відповідають «довшому» шляху через зазори b і, відповідно, сильнішому ослабленню хвилі в цих зазорах b , значення ψ_b зростає з кутом θ .

Крім того видно, що для низьких частот ($\Omega < 1$) пропускання також

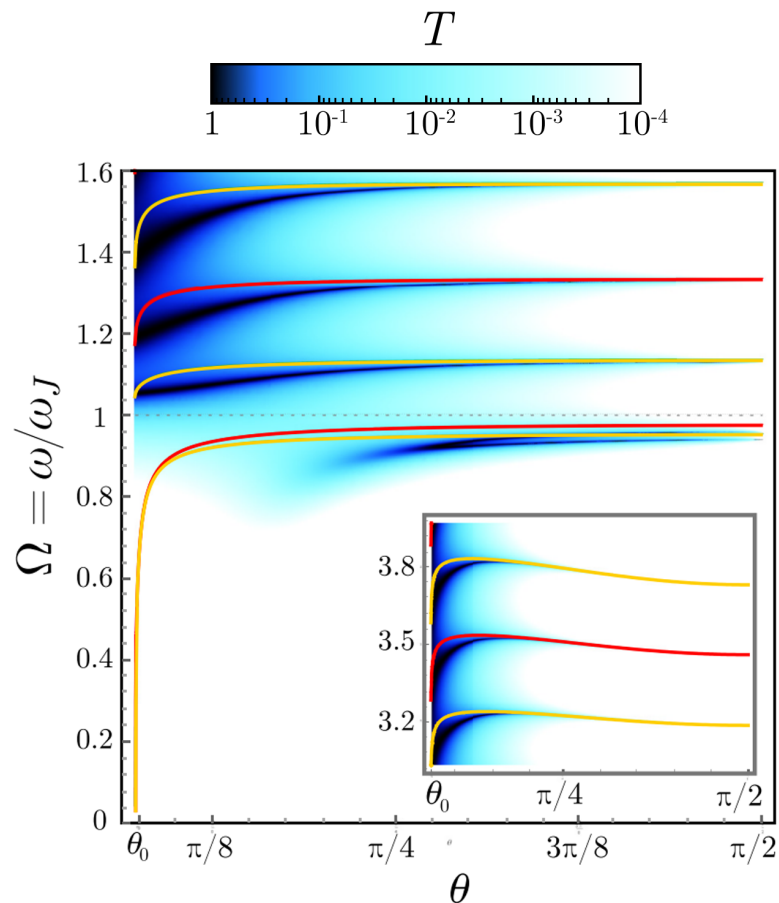


Рис. 3.4 Величина коефіцієнта пропускання T та дисперсійні криві

виявляється значно слабкішим. Поверхневі ЛХ не призводять до такого резонансного пропускання, як хвильоводні ЛХ, адже в цьому випадку згасання відбувається не тільки в зазорах b , а ще і в пластині ШНП.

Як було показано вище, чим більшим є параметр ψ_b , тим більше умова пропускання відповідає закону дисперсії ЛХ (закон дисперсії на Рис.3.5 показано червоним). Відповідно, тим вузьчими є темні області на Рис. 3.5 і тим більш їх форма схожа на форму дисперсійних кривих. Дійсно, для $d_b = \lambda_c/2$ (Рис. 3.5 б)) пропускання явно відрізняється від дисперсійних кривих (темні області лежать нижче кривих), а для $d_b = 2\lambda_c$ (Рис. 3.5 а)) — майже не відрізняється.

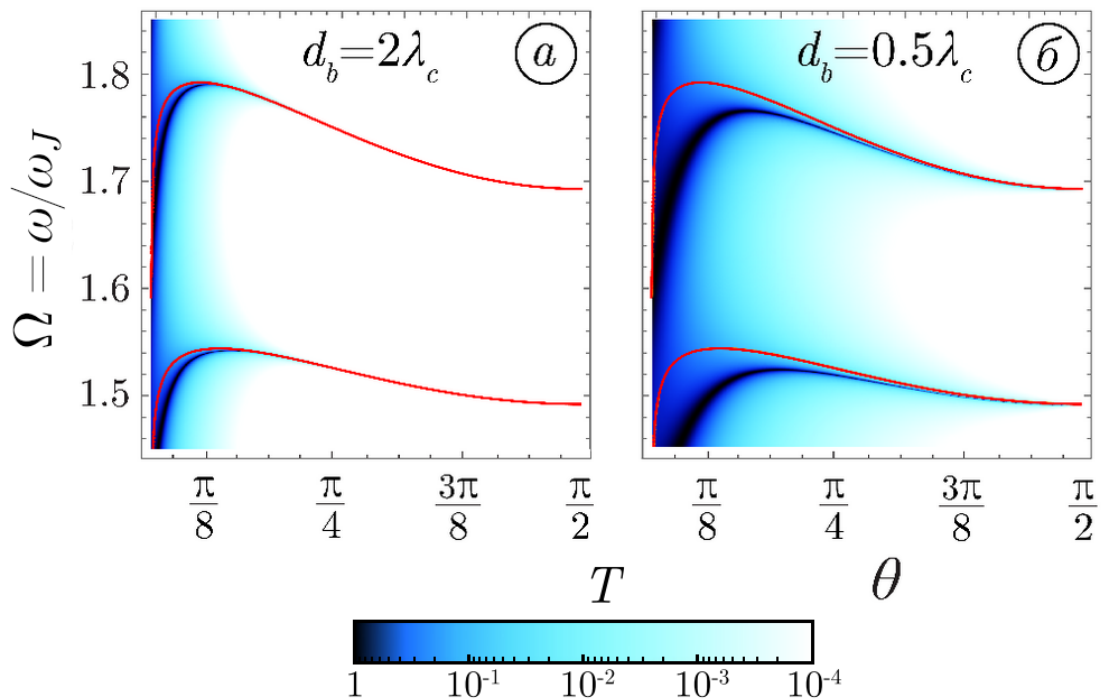


Рис. 3.5 Залежність коефіцієнта пропускання T від товщини зазору d_b при фіксованих значеннях інших параметрів, що відповідають Рис. 3.4

3.3.3 Вплив статичного магнітного поля на резонансну прозорість пластини

В попередньому розділі було показано, що зміна статичного магнітного поля h_0 зсуває спектральні криві хвильоводних ЛХ вниз по частоті Ω (див. Рис. 2.8). Тому, як видно на Рис. 3.6, поле h_0 впливає на області пропускання в координатах (Ω, θ) точно так само: зсуває по частоті, що є очікуваним.

На Рис. 3.7 показано аналогічну залежність в координатах (Ω, θ) для області малих частот ($\Omega < 1$). Збудження поверхневих ЛХ не сприяє настільки сильному резонансному пропусканні, а при збільшенні постійного магнітного поля пропускання ще слабшає, адже згасання в пластині ШНП стає ще суттєвішим.

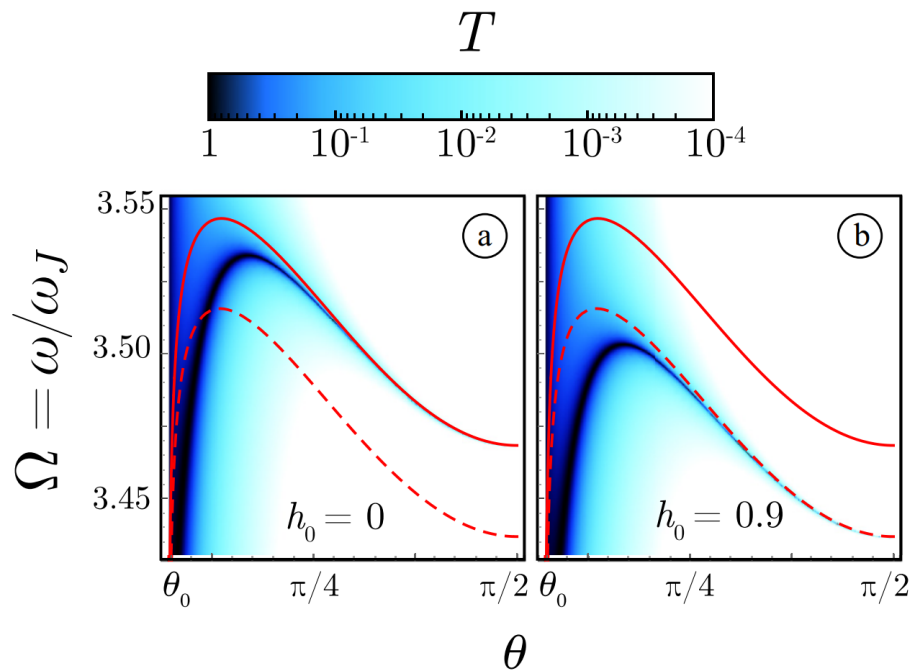


Рис. 3.6 Залежність коефіцієнта пропускання T від величини поля h_0 при збудженні хвильоводних мод при фіксованих значеннях інших параметрів, що відповідають Рис. 3.4

Як було з'ясовано ще в роботі [9], збудження ЛХ з немонотонною дисперсією, що є наслідком гіперболічності ШНП, призводить до 3 варіантів форми кривих пропускання $T(\theta)$:

- а) однопікова (нормальний гострий пік),
- б) двопікова (2 гострих піки),
- в) розширена однопікова (розширений пік).

Відповідно, перша крива виникає, коли дисперсія для обраних параметрів є тільки нормальною. Друга — коли є обидві гілки (нормальна та аномальна), при цьому кути, що відповідають локалізованим модам на цих гілках, є суттєво різними. Третя — коли ці кути майже однакові і, відповідно, два піки зливаються.

На Рис. 3.8 показано залежність коефіцієнта пропускання від кута

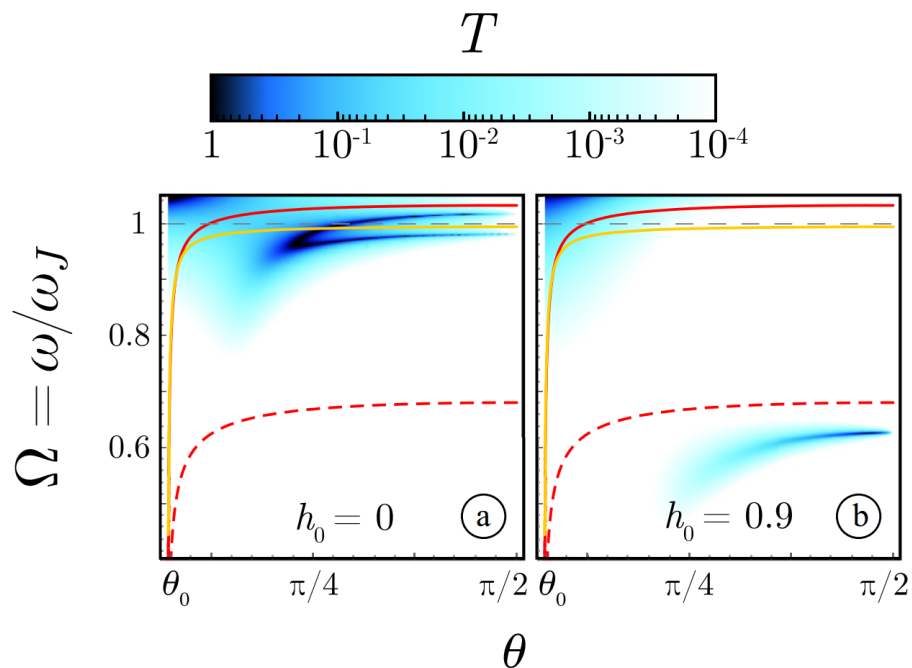


Рис. 3.7 Залежність коефіцієнта пропускання T від величини поля h_0 при збудженні поверхневих мод при фіксованих значеннях інших параметрів, що відповідають Рис. 3.4

падіння θ та

а) частоти Ω ,

б) поля h_0 .

Штриховими лініями показано перерізи графіка, які результують в приблизно однакових кривих пропускання (див. Рис. 3.9). Видно, що залежності для випадків а) і б) на Рис. 3.8 (звичайно, при спеціально підібраних параметрах) виглядають схожими. Горизонтальними штриховими лініями на Рис. 3.8 показано перерізи, що відповідають кривим пропускання, що представлено на Рис. 3.9. Інші параметри такі ж, як на Рис. 3.4.

На Рис. 3.9 побудовано криві пропускання при різних значеннях частоти Ω та магнітного поля h_0 . Ці криві відповідають перерізам, показаними штриховими лініями на Рис. 3.8. Рис. 3.9 демонструє, що можна отримати всі можливі типи кривих $T(\theta)$, варіюючи як

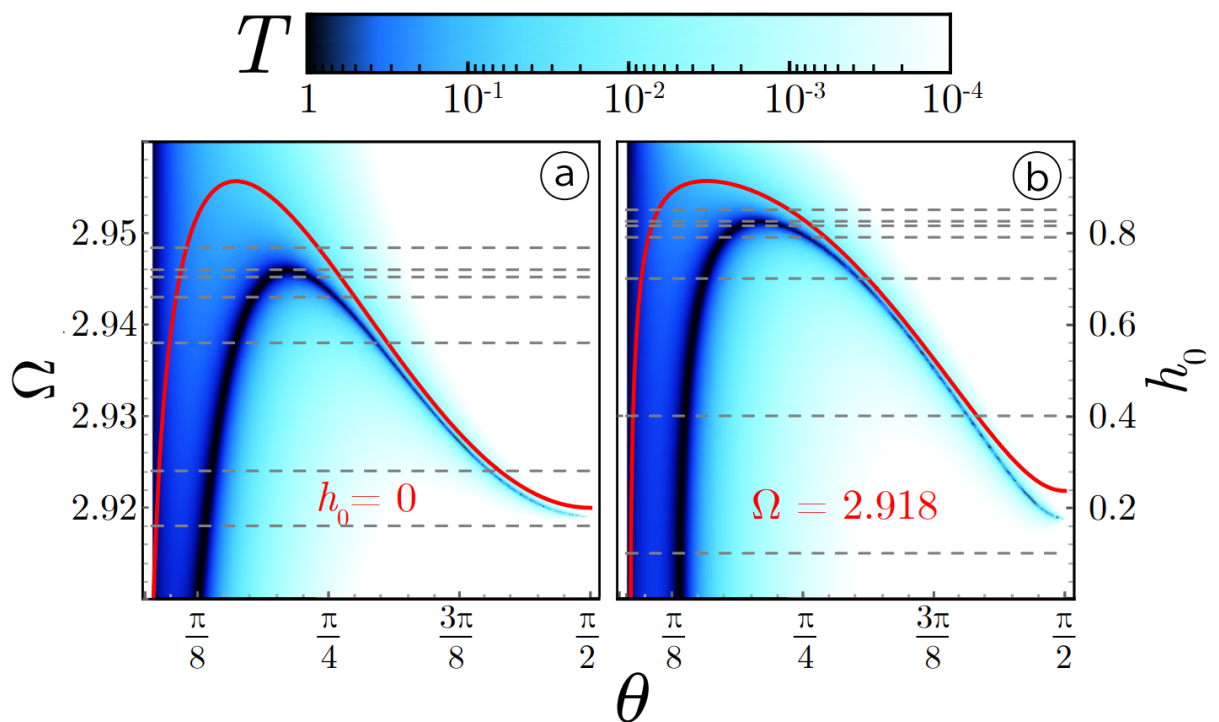


Рис. 3.8 Коефіцієнт пропускання T в залежності від: а) кута і частоти; б) кута і магнітного поля

а) частоту Ω ,

б) поле h_0 .

При цьому інший параметр залишається незмінним. Видно, що криві в правій ($\Omega = \text{const}$) і лівій ($h_0 = \text{const}$) колонках майже не відрізняються топологічно одна від одної.

Тобто, можна зробити висновок, що поле h_0 є ефективним засобом налаштування резонансної прозорості в досліджуваній системі. Більш того, якщо уважно подивитись на Рис. 3.9, то легко помітити, що варіація частоти потребує достатньо великої точності, тоді як варіація поля — ні, що робить останнє зручнішим.

Вищезгадані три типи кривих пропускання можна просто охарактеризувати кількістю та близькістю резонансних кутів θ_r (див. Рис.

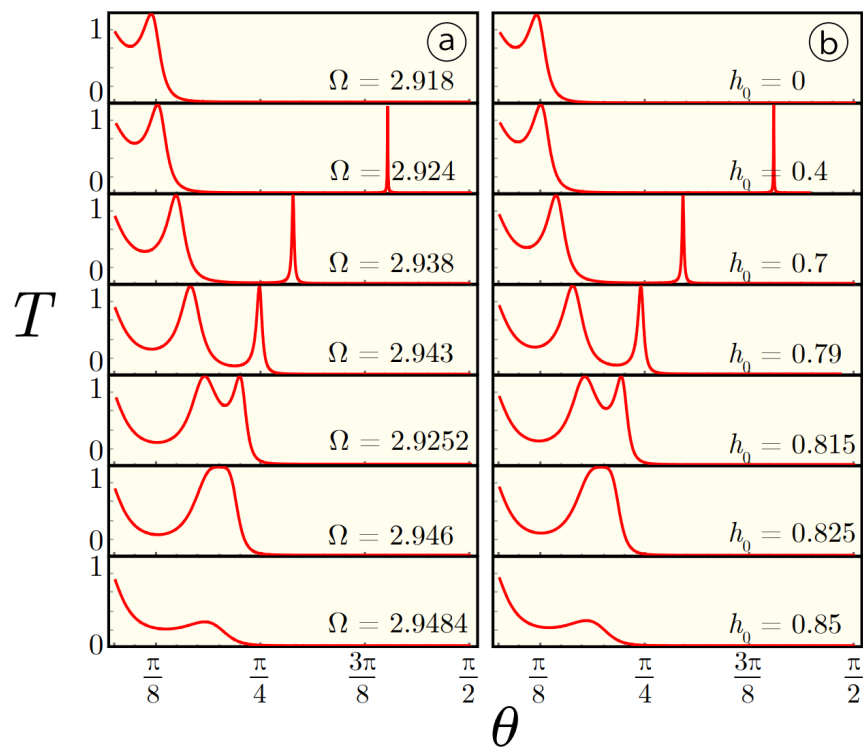


Рис. 3.9 Перерізи кольорових мап на Рис. 3.8: а) незмінне магнітне поле $h_0 = 0$, варіація частоти Ω ; б) незмінна частота $\Omega = 2.918$, варіація магнітного поля h_0

3.10, діапазони спеціально підібрані для наочності), які відповідають резонансній прозорості:

$$T = 1, \quad R = 0.$$

На Рис. 3.10 області (i), (ii), (iii) відповідають різним типам кривих пропускання. Параметри для цього рисунку: $\gamma = 100$, $\omega_J/2\pi = 1$ THz, $d_b = \lambda_c/5$, $d_c = 10\lambda_c$, $\varepsilon_a = 25$, $\varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_c = 10$. Варто зауважити, що параметри для Рис. 3.10 взяті не для натуральних ВТНП, як на попередніх рисунках, а для штучних метаструктур, що складаються з джозефсонівських контактів Nb/Al₂O₃/Nb або Al/Al₂O₃/Al [112–114], які також є прикладами ШНП.

Область (i) на Рис. 3.10 відповідає нормальному гострому піку,

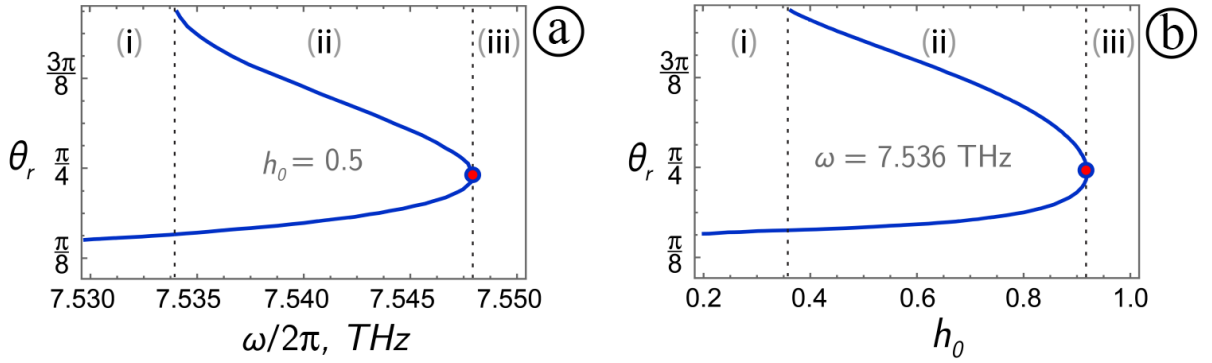


Рис. 3.10 Залежності резонансного кута θ_r від а) частоти ω , б) поля h_0

область (ii) — двопіковій залежності, область поблизу червоної точки повороту на межі областей (ii) і (iii) — розширеному піку, а область (iii) — відсутності піків. Показано, що варіювати можна як частоту, так і поле.

На Рис. 3.11 представлено коефіцієнт відбиття R для таких самих параметрів, як на Рис. 3.10. Червоною штриховою лінією показано закон дисперсії. Видно, що інші параметри (для прикладу штучних метаструктур на основі оксиду алюмінію) не змінюють суттєво вигляд графіків (пропускання і відбиття в нашій бездисипативній моделі пов'язані стандартним чином $R = 1 - T$).

Асимптотична еквівалентність варіацій поля і частоти

При високих частотах $\Omega > 1$ дисперсійні криві з відповідними областями пропускання, як вже було зазначено вище, зсуваються по частоті майже паралельно при збільшенні постійного магнітного поля. Тобто зміна статичного поля h_0 на певну малу величину Δh_0 має призводити до такого самого ефекту, як і зміна частоти Ω на певну відповідну величину $\Delta \Omega$ у відносно широкому діапазоні кутів. Знайдемо співвідношення між

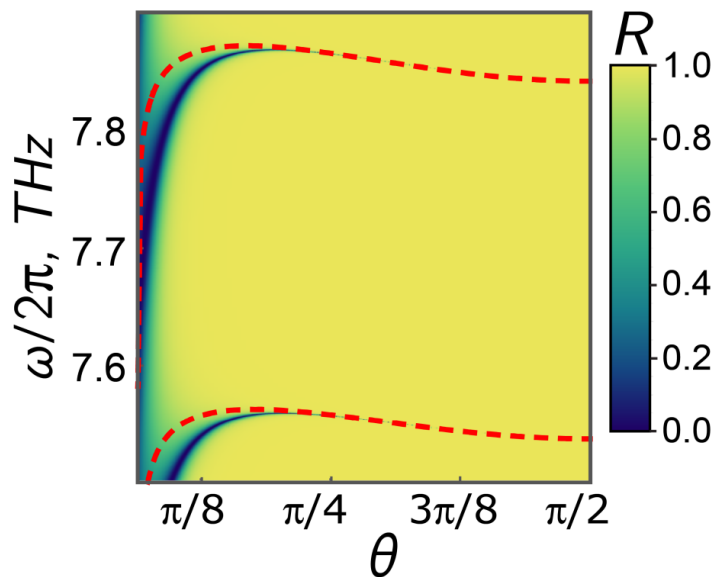


Рис. 3.11 Резонансне ослаблення відбиття

цими Δh_0 і $\Delta \Omega$:

$$\Delta h_0 \approx \frac{dh_0}{d\Omega} \Delta \Omega = \frac{\partial T / \partial \Omega}{\partial T / \partial h_0} \Delta \Omega = \frac{\frac{\partial}{\partial \Omega} M_{+-}}{\frac{\partial}{\partial h_0} M_{+-}} \Delta \Omega.$$

Відношення ρ

$$\rho(\Omega, h_0, \theta) = \frac{\partial M_{+-} / \partial \Omega}{\partial M_{+-} / \partial h_0}, \quad (3.62)$$

строго кажучи, залежить від кута падіння (адже матрична компонента M_{+-} залежить від кута θ), так що навіть для маленьких зсувів це співвідношення не є константою по θ , але для високих частот область кутів, де спостерігається пропускання, є не дуже широкою, а тому можна вважати (3.62) слабо залежним від θ , і використовувати просте співвідношення,

$$\Delta h_0 = \rho_0 \Delta \Omega,$$

де

$$\rho_0 = \rho(\Omega, h_0, \theta_0).$$

Тоді, для коефіцієнта пропускання маємо:

$$T(\theta, \Omega + \Delta\Omega, h_0) \approx T(\theta, \Omega, h_0 + \rho_0 \Delta\Omega). \quad (3.63)$$

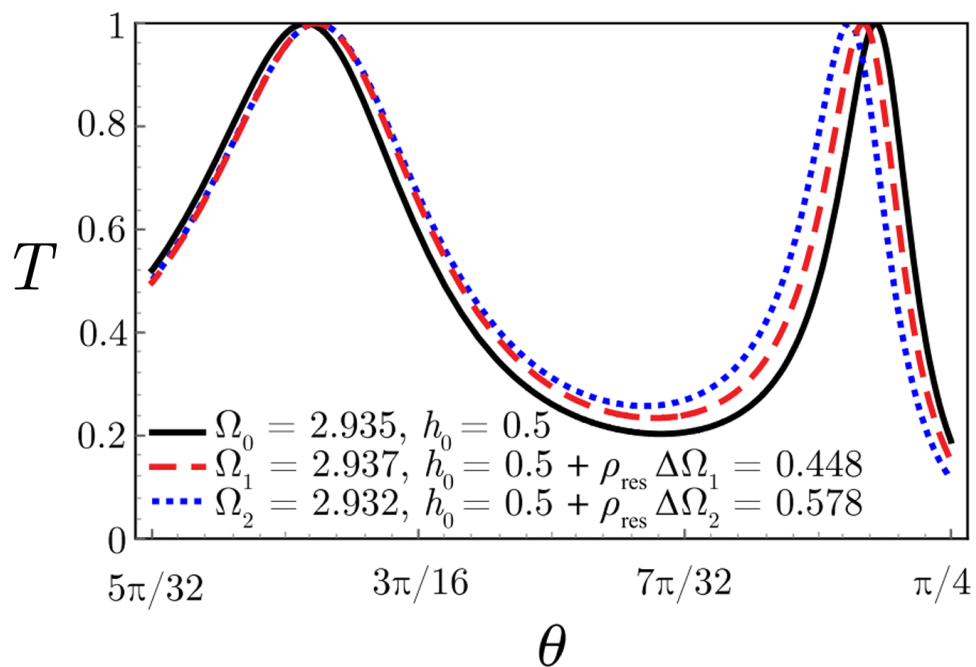


Рис. 3.12 Криві пропускання при різних значеннях частоти Ω та магнітного поля h_0

Вищенаведена властивість (3.63) проілюстрована на Рис. 3.12. Тут зміна частоти на $\Delta\Omega$ еквівалентна зміні поля h_0 на $\rho_0 \Delta\Omega$. Значення $\rho_0 \approx -26$. Інші параметри такі ж, як на Рис. 3.4. Видно, що двопікові криві, одержані таким чином, майже не відрізняються.

Висновки до розділу 3

1. В цьому розділі досліджено вплив відносно слабкого зовнішнього статичного магнітного поля на резонансну прозорість пластини ШНП для ТГц хвилі в двосторонній Отто-конфігурації: пластину поміщено в діелектричне середовище і відокремлено з обох боків тонкими просторовими проміжками, що заповнено оптично менш щільним діелектриком (в нашому випадку — вакуумом). В такій геометрії можливо збудження власних мод (ЛХ), коли падаюча хвиля проходить від лівого зовнішнього діелектрика до правого. Збудження ЛХ пояснює резонансну прозорість пластини ШНП при певних параметрах, близьких до тих, які дають дисперсійні криві ЛХ.

2. Показано, як саме статичне магнітне поле входить у тензор ефективної діелектричної проникності, а отже впливає на поширення хвиль. Задачу розв'язано аналітично в рамках формалізму трансфер-матриць. Метод модифіковано для негармонічних функцій, які описують ЕМ поле в пластині за наявності постійного магнітного поля — спеціальних функцій Лежандра. Зокрема, отримано явний вираз для трансфер-матриць, що ефективно описують проходження хвилі через «хвіст» джозефсонівського вихору, зумовленого слабким статичним полем, які не залежать ні від розміру зразка, ні від типу діелектричного середовища, а залежать лише від величини статичного поля. Запропоновано використання цих матриць для спрощення аналізу проходження плоскої ТГц хвилі через складну систему, що містить одну або більше пластин ШНП, з обох боків яких містяться діелектрики.

3. Використовуючи знайдені трансфер-матриці, отримано та досліджено явні вирази для коефіцієнтів пропускання та відбиття. Вивчено явище

резонансної прозорості (повне проходження хвилі), викликане збудженням ЛХ в пластині ШНП та вплив зовнішнього поля на це явище.

4. Показано, що залежність коефіцієнта пропускання від кута падіння $T(\theta)$ може набувати специфічної форми через немонотонність дисперсійних кривих для ЛХ. Залежно від частоти та величини поля, графік $T(\theta)$ може мати один гострий пік (подібний до такого, який би спостерігався, якби замість пластини ШНП було б взято матеріал з нормальною дисперсією), або один розширений пік, або два близьких гострих піка.

5. Запропоновано використовувати статичне магнітне поле для експериментального спостереження динаміки форми кривої $T(\theta)$ і контролю проходження ТГц хвиль. Адже в порівнянні зі зміною частоти це потребує значно менш точного налаштування: зміна величини статичного магнітного поля на 1% призводить приблизно до такого самого ефекту, як зміна частоти на величину порядку 0,01%, а тому є простішою в реалізації.

РОЗДІЛ 4

ФОКУСУВАННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА ПЛАСТИНОЮ ШНП

В цьому розділі досліджено нелінійне фокусування лазерного пучка гауссового профілю пластиною ШНП, кероване статичним магнітним полем. Тут представлено результати, опубліковані в роботі [17].

4.1 Модель

Нами досліджено пропускання лазерного пучка гауссового профілю через пластину ШНП товщиною $d_c = 2d$, що знаходиться у зовнішньому статичному магнітному полі, яке відповідає умові (2.12), тобто є не настільки сильним, щоб в пластині ШНП з'явилися вихори,

$$\vec{H}_{dc} = H_{dc}\vec{e}_y,$$

в геометрії, представлений на Рис. 4.1. Лазерний пучок початкового радіуса r_0 фокусується пластиною ШНП. F та r_{\min} на Рис. 4.1 відповідають фокусній відстані та мінімальному радіусу пучка, що пройшов, відповідно. Червоною штриховою лінією схематично показано просторовий розподіл статичного магнітного поля $H_{dc}(x)$.

Надпровідні шари пластини ШНП є перпендикулярними до її поверхонь. Гауссовий пучок падає ортогонально до поверхні пластини ШНП ($x = -d$) та поляризується таким чином, що електричне поле \vec{E} перпендикулярно до шарів,

$$\vec{E} = E\vec{e}_z.$$

В такій поляризації в пластині ШНП виникають лише так звані «надзвичайні» хвилі, які призводять до максимально вираженого нелінійного фокусування пучка, що пройшов [10].

З міркувань простоти запису формул ми припускаємо, що початковий пучок точно сфокусовано на лівій поверхні пластини $x = -d$, а значить кривина пучка в цій точці дорівнює нулю. Але принципово це припущення нічого не змінює.

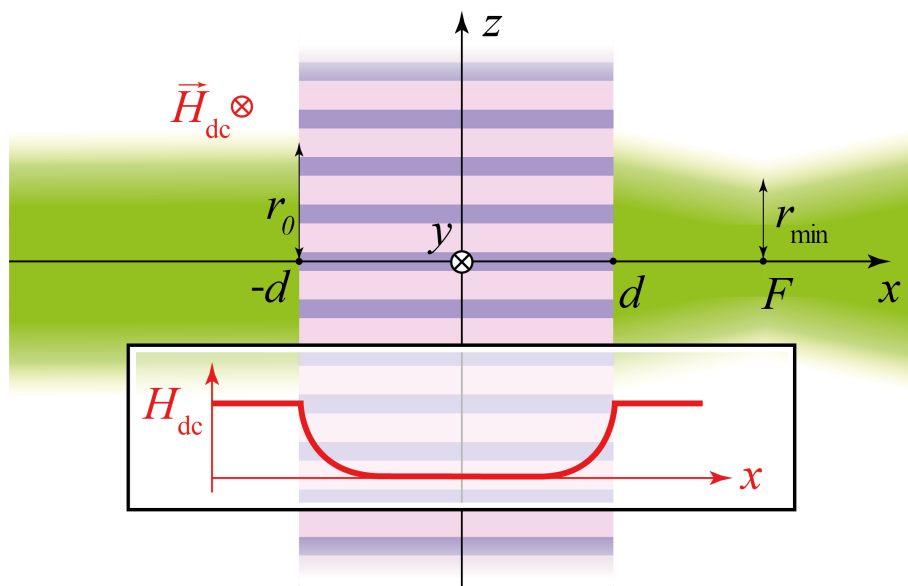


Рис. 4.1 Геометрія задачі

Ми припускаємо, що лазерний пучок залишається гауссовим як у вакуумі, так і в пластині ШНП. Гауссовий профіль, строго кажучи, втрачається через його багаторазове відбивання і нелінійність, але для не дуже товстої пластини ШНП з реалістичними параметрами цим можна знехтувати. Тоді поле всередині пластини ШНП ми можемо записати як суперпозицію двох гауссових пучків, що біжать «вперед» та «назад».

Прийнятність останнього припущення було перевірено методом чисельного моделювання у роботі [10].

Нижче буде коротко наведено основні рівняння для лазерного пучка у вакуумі та в ШНП.

4.1.1 Гауссовий пучок у вакуумі

Розподіл електричного поля для гауссового пучка частоти ω , що поширюється вздовж осі x у вакуумі, має наступний вигляд [115, 116]:

$$E(x, r, t) = E_v \exp\left(-\frac{r^2}{r_c^2}\right) \sin \Phi_v, \quad (4.1)$$

де фаза Φ_v залежить від координат і часу.

$$\Phi_v(x, r, t) = k_v \left(x + \frac{\alpha r^2}{2}\right) - \omega t + \phi,$$

Тут

$$r^2 = z^2 + y^2.$$

Хвильове число k_v має підкорятися дисперсійному співвідношенню для вакууму,

$$k_v = \frac{\omega}{c},$$

а амплітуда E_v , фаза ϕ , радіус r_c і кривина хвильового фронту α повільно змінюються вздовж шляху гауссового пучка через систему, тобто ці характеристики пучка є функціями координати x . Ми вважаємо виконаним припущення, що характерна ширина пучка набагато більша за довжину хвилі,

$$k_v r_c \gg 1.$$

Для області ліворуч пластини ШНП (див. Рис. 4.1) ми встановлюємо $r_c = r_0$ в рівнянні (4.1) і розглядаємо два пучки, падаючий і відбитий, з відповідними амплітудами, кривинами та фазами. А саме, для падаючого пучка:

$$E_v = E_0, \quad \alpha = \alpha_i = 0, \quad \phi = \phi_i = 0,$$

а для відбитого пучка:

$$E_v = E_r, \quad \alpha = \alpha_r, \quad \phi = \phi_r.$$

Для області праворуч пластини ШНП (див. Рис. 4.1), маємо пучок, що пройшов, для якого

$$E_v = E_t, \quad \alpha = \alpha_t, \quad \phi = \phi_t.$$

Так як пластина ШНП фокусує лазерний пучок, то для цієї області ($x > d$) не можна вважати, що радіус пучка r_c зберігається (це можна припускати лише для лівої області). Можна показати [116], що мінімальний радіус r_{\min} , до якого збігається пучок, що пройшов, який визначає ефективність фокусування, можна виразити через значення кривини α_t на правій границі,

$$r_{\min} = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \alpha_t^2 k_v^2 r_0^4 / 4}}, \quad (4.2)$$

а фокусна відстань F дорівнює

$$F = -\frac{1}{\alpha_t + 4/(\alpha_t k_v^2 r_0^4)}. \quad (4.3)$$

Ці величини схематично показано на рис. 4.1

4.1.2 Гауссовий пучок в ШНП

Нелінійні хвилі в ШНП

Компоненти ЕМ поля всередині пластини ШНП, як було описано у попередніх розділах, виражається через міжшарову різницю фаз параметра порядку, (2.29) і (2.30), а сама вона підкоряється синусоїдальному рівнянню Гордона (1.2). Оскільки поле лазерного пучка — це функція r , а не x , то в рівнянні (1.2) треба врахувати y -координату, просто замінивши:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Рівняння (1.2) є нелінійним, а тому для того, щоб врахувати наявність зовнішнього поля H_{dc} , яке, нагадаємо, проникає в пластину неоднорідно (див. Рис. 2.7), треба повторити процедуру, описану в розділі 2.2. Зазначимо, що в розділі 2.2 магнітне поле взаємодіяло з *лінійними* ДПХ, лише створюючи для них неоднорідний фон, а тому для хвильової складової поля синус в рівнянні (1.2) було розкладено в першому лінійному наближенні. Але зараз нас цікавить саме *нелінійне* фокусування, а отже ми не можемо просто скористатися формулами, отриманими в 2.2, і процедуру треба повторити, залишаючи наступний член розкладу у відповідному рівнянні (ми будемо розглядати слабку нелінійність).

Отже, як і в розділі 2.2, ми представляємо шукану різницю фаз у вигляді суми,

$$\varphi(x, r, t) = \varphi_{dc}(x) + \varphi_w(x, r, t). \quad (4.4)$$

Перший доданок φ_{dc} в (4.4) відповідає статичному полю і, вважаючи пластину ШНП достатньо товстою (2.11), його можна записати як суму двох «хвостів» вихорів, розв'язків (1.13) стаціонарного рівняння СГ (1.14) поблизу двох поверхонь:

$$\begin{aligned} \varphi_{dc}(x) &= \varphi_{st}(x) - \varphi_{st}(-x), \\ \varphi_{st}(x) &= 4 \operatorname{arctg}[e^{-\xi_1 - (d-x)/\lambda_c}], \quad \xi_1 = \operatorname{arch} \frac{H_c}{H_{dc}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Другий доданок φ_w описує шукану хвилю. Тоді, розкладаємо синус в рівнянні (1.2) до третього порядку по малому доданку φ_w , після чого отримуємо:

$$\sin \varphi = (1 - \varphi_w^2/2) \sin \varphi_{dc} + (\varphi_w - \varphi_w^3/6) \cos \varphi_{dc}. \quad (4.6)$$

Нелінійний доданок з φ_w^3 є малим майже завжди, але в області частот $\omega \approx \omega_J$ він може бути дуже важливим, в цій області навіть при $\varphi_w \ll 1$ можуть спостерігатися сильні нелінійні ефекти [2, 10], якщо

$$\varphi_w \sim \beta = \sqrt{\omega^2/\omega_J^2 - 1} \ll 1.$$

Тоді, підставивши (4.6) в рівняння СГ (1.2), отримаємо наступне диференціальне рівняння для шуканого хвильового доданка,

$$\beta^2 \varphi_w + \frac{\varphi_w^3}{6} + (1 - \cos \varphi_s) \varphi_w + \lambda_c^2 \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2} = 0, \quad (4.7)$$

яке буде розв'язано нижче. Треба зауважити, що в цьому рівнянні знехтовано другими похідними по z і y , адже вони є малими відносно інших членів рівняння (1.2) для випадку достатньо тонкої пластини [10]:

$$d \ll r_0.$$

Гауссові пучки в ШНП

Пучок, який поширюється в пластині ШНП, має багаторазово відбиватися від обох поверхонь, що, строго кажучи, призводить до втрати гауссового профілю. Але в достатньо тонкому зразку (див. [10]) профіль зберігається, а отже ми можемо представити сумарний пучок як пучок, що рухається «вперед», та пучок, що рухається «назад», адже всі багаторазово відбиті пучки, що рухаються в одному напрямку, в цьому випадку можна вважати одним пучком. Тоді для електричного поля можна записати:

$$E_S(x, r, t) = H_c \exp(-r^2/r_0^2) \times [E_+(x) \sin \Phi_+(x, r, t) + E_-(x) \sin \Phi_-(x, r, t)] \quad (4.8)$$

з фазами

$$\Phi_{\pm}(x, r, t) = \pm k_{\pm}(r) \left[x + \frac{\alpha_{\pm}(x)r^2}{2} \right] - \omega t + \phi_{\pm}(x). \quad (4.9)$$

Тут знаки \pm відповідають руху пучка «вперед» та «назад».

Нижче буде отримано вирази для амплітуд E_{\pm} , кривин α_{\pm} , фаз ϕ_{\pm} , та хвильових чисел $k_{\pm}(r)$.

4.2 Отримання параметрів фокусування пучка

Для дослідження впливу магнітного поля на основні параметри фокусування (4.3), (4.2) нам необхідно отримати аналітично кривину α_t пучка, що пройшов через систему. Це буде зроблено у цьому підрозділі.

4.2.1 Пучок далеко від поверхонь пластини

Перш за все опишемо пучок в областях пластини ШНП, в які магнітне поле H_{dc} практично не проникає. Впливом від «хвостів» джозефсонівських вихорів можна знехтувати, коли внеском від доданка φ_{dc} в рівняння (4.7) можна знехтувати. Це можна зробити, коли виконується нерівність,

$$\exp[-\xi_1 - (d - |x|)/\lambda_c] \ll \beta. \quad (4.10)$$

Так як ліва частина цієї нерівності, очевидно, експоненційно мала в центрі пластини ШНП, то в цій області ми можемо використати результати, отримані в роботі [10] для випадку $H_{dc} = 0$. Тоді кривини і фази можна вважати константами, і з рівнянь (4.7) та (4.9) витікає наступний зв'язок хвильового числа $k_{\pm}(r)$ з амплітудами нелінійних хвиль в пластині ШНП [10]:

$$k_{\pm}(r) = k_c + \frac{\kappa_{\pm}}{\lambda_c} - \frac{\gamma_{\pm}}{\lambda_c} \frac{r^2}{r_0^2}, \quad (4.11)$$

$$\gamma_{\pm} = \kappa_{\pm} \frac{2\beta + \kappa_{\pm}}{\beta + \kappa_{\pm}}, \quad (4.12)$$

$$8\kappa_{\pm}(2\beta + \kappa_{\pm}) = \varepsilon_c(E_{\pm}^2 + 2E_{\mp}^2). \quad (4.13)$$

Тут хвильове число k_c визначається з відомого дисперсійного співвідношення для лінійних ДПХ в пластині ШНП:

$$k_c^2 \lambda_c^2 = \frac{\omega^2}{\omega_J^2} - 1.$$

Варто відзначити, що радіальна залежність $k_{\pm}(r)$ виникає через нелінійність. Це ефективно означає, що різні області хвильового фронту в пластині ШНП рухаються з різними швидкостями, а отже, після проходження через зразок пучок може сходитися. В лінійному режимі, очевидно, фокусування не є можливим.

Вирази (4.11) ми можемо використовувати далеко від поверхонь $x = \pm d$ за умови (4.10). А отже, це означає, що в областях, де магнітного поля майже нема, амплітуди E_{\pm} , фази ϕ_{\pm} , і кривини α_{\pm} є константами. Але поблизу поверхонь, де статичне магнітне поле не є малим, їх вже не можна вважати константами, адже воно суттєво впливає на поширення хвилі в ШНП. І саме тому магнітне поле може бути використано для налаштування параметрів фокусування (див. нижче).

4.2.2 Пучок поблизу поверхонь пластини

Поблизу границь пластини ШНП, де магнітне поле проникає з обох сторін як «хвости» джозефсонівських вихорів, в рівнянні (4.7) можна знехтувати малим параметром β , адже множник $(1 - \cos \varphi_s)$ тепер не є малим. Підставляючи в це рівняння вирази для електричного поля (4.8), отримаємо рівняння, що з'єднує параметри пучка. Розкладаючи його по $r^2/r_0^2 \ll 1$, зберігаючи тільки квадратичні доданки і розглядаючи окремо множники при $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, $r^2 \sin(\omega t)$ та $r^2 \cos(\omega t)$, можна отримати

наступні співвідношення:

$$E_{\pm}(x) = f(x)E_{\pm}, \quad (4.14)$$

$$\phi_{\pm}(x) = \phi_{\pm}, \quad (4.15)$$

$$\alpha_{\pm}(x) = \alpha_{\pm}, \quad (4.16)$$

де

$$f(x) = f_0(x - d) + f_0(-x - d) + 1, \quad (4.17)$$

$$f_0(x) = \text{th}(x/\lambda_c + \xi_0) - 1, \quad (4.18)$$

а E_{\pm} , ϕ_{\pm} , і α_{\pm} — константи, такі самі, як і далеко від поверхонь. Зауважимо, що фазу та кривину ми вважаємо константами і для близького до поверхонь випадку.

Це, звичайно, не є точним розв'язком, але асимптотично, для малих параметрів β (а саме цей діапазон нас і цікавить), фаза і кривина можуть вважатися незмінними.

Покажемо це, наприклад, для фази $\phi_{\pm}(x)$. Більш точне рівняння ніж тривіальне (4.15), отримане за вищеописаним алгоритмом, має наступний вигляд:

$$\phi'_{\pm}(x) = \frac{k_{\pm 0}}{f^2(x)} - k_{\pm 0}, \quad k_{\pm 0} = k_{\pm}(r = 0),$$

де штрихом позначено похідну по x . Так, видно, що фаза сама по собі залежить від координати, але набіг фази при проходженні від лівого до правого краю, а саме набіг фази змінює наш пучок, виявляється малим:

$$\int_{-d}^d \phi'_{\pm}(x) dx = \int_{-d}^d \left(\frac{k_{\pm 0}}{f^2(x)} - k_{\pm 0} \right) dx \sim \lambda_c k_s = \beta \ll 1.$$

Отже, ним можна знехтувати. Подібним чином аналогічні вирази (хіба що більш громіздкі) можна отримати і для кривин $\alpha_{\pm}(x)$. Тому, фази ϕ_{\pm} та кривини α_{\pm} можна вважати постійними вздовж координати x , як і зазначено в (4.14).

Для магнітної компоненти поля H_y з рівнянь (4.8), використовуючи (2.29), (2.30) та (4.14), можна отримати наступний вираз:

$$H_S(x, r, t) = H_{S+}(x, r, t) + H_{S-}(x, r, t),$$

де

$$H_{S\pm}(x, r, t) = H_c H_{\pm} \exp(-r^2/r_0^2) \times \left[\frac{k_{\pm}(r)}{k_{\pm 0} f(x)} \sin \Phi_{\pm}(x, r, t) \pm \frac{f'(x)}{k_{\pm 0}} \cos \Phi_{\pm}(x, r, t) \right], \quad (4.19)$$

$$H_{\pm} = \pm \sqrt{\varepsilon} \lambda_c k_{\pm 0} E_{\pm}.$$

Отже, ми отримали вирази для тангенціальних компонент ЕМ поля з урахуванням присутності статичного магнітного поля H_{dc} . Тепер, використовуючи ГУ на границях, можна знайти всі параметри пучків для всіх областей задачі.

4.2.3 «Зшивання» полів лазерних пучків на границях між діелектриками та надпровідником

Тепер ми «зшиємо» поля лазерних променів у вакуумних областях (падаючих та відбитих хвиль в точці $x = -d$) і хвилі, що пройшла крізь пластину в точці $x = d$), з полями променів всередині пластини ШНП. Для цього необхідно узгодити тангенціальні компоненти електромагнітного поля на обох границях вакуум-пластина ШНП.

Шуканими величинами є:

а) амплітуди $E_{r/t/\pm}$,

б) фази $\phi_{r/t/\pm}$,

в) кривини $\alpha_{r/t/\pm}$

пучків, які поширюються як в прямому, так і в зворотному напрямках як у вакуумі, так і в пластині ШНП. А отже, всього ми маємо для пошуку 12 величин. При цьому параметри падаючого променя вважаються відомими, E_i , $\phi_i = 0$ і $\alpha_i = 0$.

Щоб отримати набір із 12 рівнянь для необхідних величин, ми розкладаємо вирази для полів (4.8), (4.19) у ряди по радіусам $r \ll r_0$ та зберігаємо члени до другого порядку, оскільки ми нехтуємо негауссовими відхиленнями, спричиненими членами вищого порядку по r/r_0 . Крім того, ми приймаємо до уваги те, що амплітуди магнітного поля хвилі набагато менші, ніж амплітуди електричного поля,

$$H_{\pm} \sim \beta E_{\pm} \ll E_{\pm},$$

оскільки

$$k_{\pm} \lambda_c \sim \beta$$

і

$$\sqrt{\varepsilon_c} \sim 1.$$

Тому для магнітного поля (4.19) ми нехтуємо також доданками порядку r^2 , тобто зберігаємо лише головний порядок. В результаті отримуємо шукану систему з 12 рівнянь.

Тепер можна виключити з цієї системи фази $\phi_{r/t/\pm}$, кривини $\alpha_{r/\pm}$ та амплітуди $E_{r/t}$, і отримати явний вираз для кривини α_t , яка визначає

параметри фокусування:

$$\alpha_t = \frac{2d}{k_v \lambda_c r_0^2} \left\{ \tilde{\gamma} - \frac{\bar{\gamma} [(1 - h_0^2)/\sqrt{\varepsilon_c} + \tilde{\kappa}]}{\bar{\kappa} - h_0^2 \sqrt{1 - h_0^2} \operatorname{tg}(2\bar{\kappa}d/\lambda_c)} \right\}. \quad (4.20)$$

Крім того, в наближенні $\beta \rightarrow 0$, знаходимо прості рівняння, які зв'язують амплітуди E_{\pm} в пластині ШНП з амплітудою падаючої хвилі E_i ,

$$\chi E_+ + H_+ = -(\chi E_- + H_-), \quad (4.21)$$

$$\sqrt{\chi} \frac{E_+ - E_-}{2} \sin(2\bar{\kappa}d/\lambda_c) = \frac{E_i}{H_c}, \quad (4.22)$$

де

$$\bar{\gamma} = (\gamma_+ + \gamma_-)/2, \quad \tilde{\gamma} = (\gamma_+ - \gamma_-)/2, \quad (4.23)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2} + \beta, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa_+ - \kappa_-}{2}. \quad (4.24)$$

Тут множник χ несе в собі всю інформацію про постійне магнітне поле:

$$\chi = 1 - h_0^2 + \varepsilon_c h_0^4, \quad h_0 = H_{dc}/H_c.$$

Амплітуди магнітного H_{\pm} та електричного E_{\pm} полів і параметри κ_{\pm} пов'язані між собою набором алгебраїчних рівнянь (4.13), (4.19) та (4.21), (4.22). А отже, розв'язуючи цю систему, можна встановити значення кривини α_t (4.20). Знаючи α_t , отримуємо фокусну відстань F (4.3) та мінімальний радіус пучка (4.2). Очевидно, що ці величини є нелінійними функціями постійного магнітного поля H_{dc} та амплітуди падаючої хвилі E_i .

Зауважимо, що при отриманні цих простих рівнянь ми знехтували

членами порядку малого параметра β у рівняннях (4.21), (4.22). Для дуже малих β ці рівняння є справедливими (чисельне моделювання показує, що їх можна використовувати для досить малих значень $\beta \lesssim 0.03$, див. розділ 4.4), але для більших β , як показує чисельна симуляція, необхідно розв'язувати вищезгадану систему 12 рівнянь без додаткових наближень, зберігаючи додаткові члени порядку β . Уточнену систему рівнянь (Б.1) наведено в додатку Б, і саме її використано для побудови наступних графіків.

Важливо відзначити, що формально такі дії можуть і не призвести до кращої точності, оскільки в усій задачі ми припустили $\beta \ll 1$. Однак чисельне моделювання (див. розділ 4.4) показує узгодженість отриманих результатів із уточненими рівняннями. Більш того, використовуючи формули (Б.1) можна отримати явно і коефіцієнт пропускання T , підставляючи вирази для амплітуд в його визначення,

$$T = \frac{E_t^2}{E_i^2}.$$

Вираз для коефіцієнта прозорості наведено в додатку Б (див. формулу (Б.2)).

Аналізуючи уточнені рівняння (Б.1), легко побачити, що якщо знехтувати членами з $\bar{\kappa} \sim \tilde{\kappa} \sim \beta \ll 1$ та врахувати, що $H_{\pm}^2 \ll E_{\pm}^2$, ми можемо з них отримати формули

$$\begin{aligned} (\chi E_+ + H_+)^2 &= (\chi E_- + H_-)^2, \\ \chi E_-^2 \sin^2 [2\bar{\kappa}d/\lambda_c] &= \frac{E_i^2}{H_c^2}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

які з урахуванням $E_+ \approx -E_-$ збігаються з (4.21), (4.22).

4.3 Вплив постійного магнітного поля на фокусування пучка

Таким чином, розроблений вище теоретичний підхід дозволяє з рівнянь (4.2), (4.3) та (4.20) знайти фокусну відстань F і мінімальний радіус r_{\min} для пучка, що пройшов крізь пластину ШНП.

Тепер переходимо до аналізу того, як величини F і r_{\min} залежать від основних параметрів задачі — частоти ω , амплітуди E_0 падаючого променя і величина статичного магнітного поля H_{dc} .

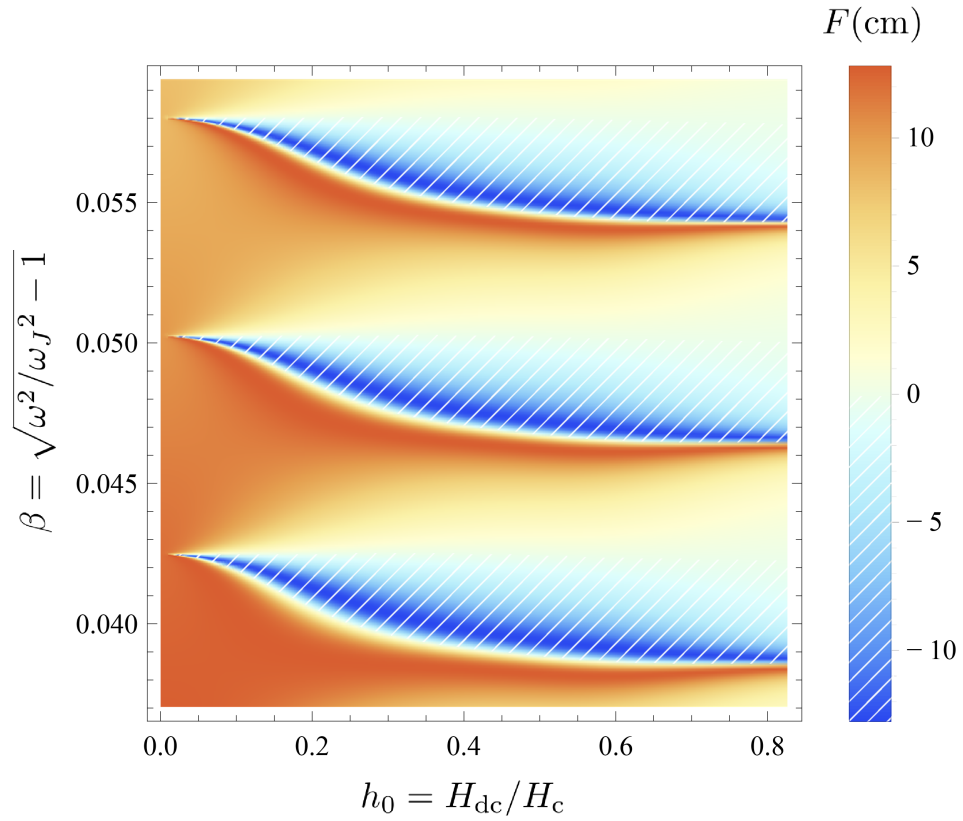


Рис. 4.2 Залежність фокусної відстані F від частоти ω та поля H_{dc}

На Рис. 4.2 показано залежність фокусної відстані F від частоти відстройки, представлені безрозмірним параметром β , і від параметра $h_0 = H_{\text{dc}}/H_c$. Штрихування показує область дефокусування. Параметри для цього рисунку: $\omega_J/2\pi = 2$ ТГц, $r_0 = 3.5$ мм, $\gamma = 15$, $d = 1.25$ мм,

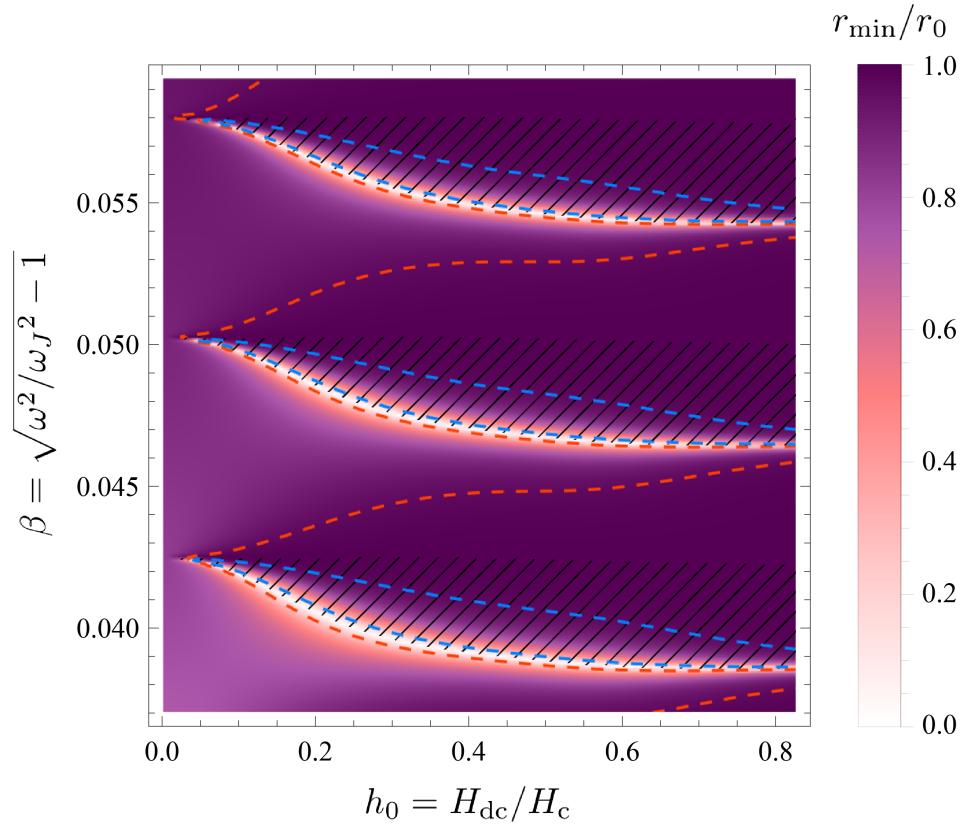


Рис. 4.3 Залежність ефективності фокусування r_{\min}/r_0 від частоти ω та поля H_{dc}

$E_i = 0.05$ кВ/см, $D_0 = 20$ Å, $\varepsilon_c = 15$. Видно, що попри те, що зовнішнє статичне магнітне поле проникає в пластину ШНП лише на невелику глибину $\sim \lambda_c$, воно істотно впливає на фокусну відстань. Це означає, що це поле може бути використаним для налаштування фокусування ТГц випромінювання.

Цікаво, що заштриховані області на Рис. 4.2 (показано синім) відповідають негативній фокусній відстані F . Це означає *дефокусування* пучка. Але за відсутності поля H_{dc} синіх областей немає (лівий край на Рис. 4.2), а отже пластина ШНП може *тільки фокусувати* випромінювання через нелінійність [10]. Постійне магнітне поле H_{dc} дозволяє отримувати як фокусування, так і дефокусування. Це принципово розширює різноманітність можливостей керування в системі в порівнянні з налаштуванням

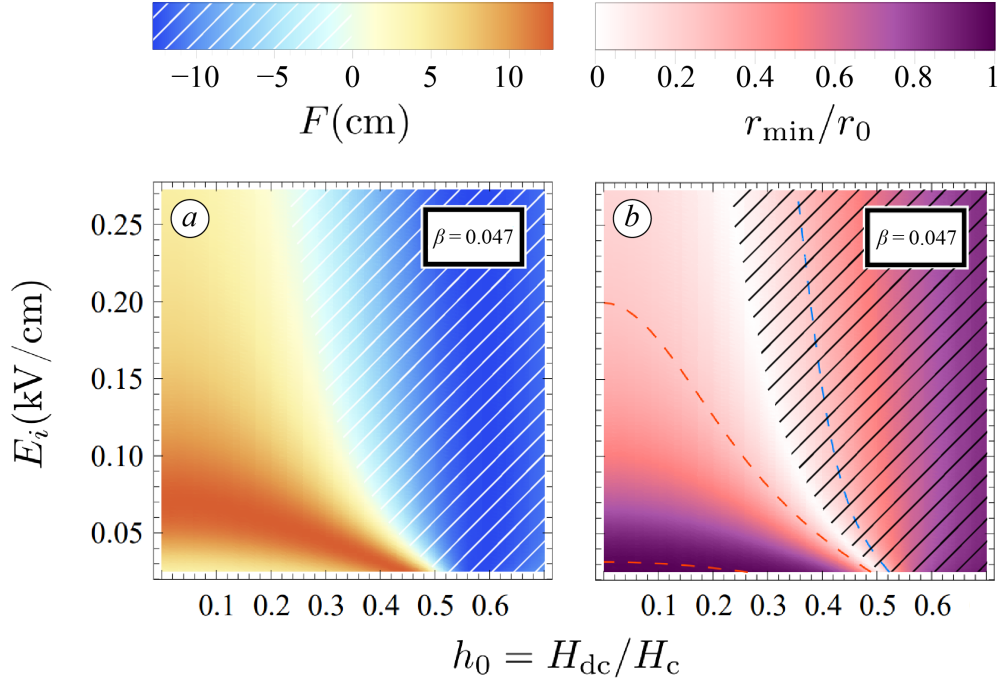


Рис. 4.4 Залежності фокусої відстані F та ефективності фокусування r_{\min}/r_0 від амплітуди E_i падаючої хвилі та величини постійного магнітного поля H_{dc} при $\beta = 0.047$.

іншими параметрами.

Що стосується частотної залежності, ми бачимо, що для ненульового поля існує чітка майже періодична залежність фокусної відстані від параметра β . «Період» по β можна оцінити з простих міркувань. Періодичність визначається кількістю довжин хвиль, які вміщуються на пластині ШНП. Це означає, що період по x -компоненті хвильового числа Δk_x задовольняє умові:

$$2d_c \Delta k_x = 2\pi.$$

. Так як $k_x \approx \beta/\lambda_c$, для періоду по параметру $\beta = \sqrt{\omega^2/\omega_J^2 - 1}$ ми

отримуємо:

$$\Delta\beta \approx \frac{\pi\lambda_c}{d_c}.$$

Остання формула для оцінки періоду при параметрах, використаних на Рис. 4.2, дає

$$\Delta\beta \approx 0,008,$$

що добре відповідає тому, що можна побачити на вищенаведених Рис. 4.2 та Рис. 4.3.

Тепер розглянемо мінімальний радіус r_{\min} пучка, що пройшов, ступінь зменшення якого у порівнянні з r_0 характеризує ступінь ефективності фокусування (див. Рис. 4.1), як функцію частоти та величини поля H_{dc} . Рис. 4.3 показує цю залежність. Червона та синя штрихові лінії відповідають постійним фокусним відстаням $F = 6$ см та $F = -6$ см, відповідно.

Варто зауважити різке збільшення ефективності фокусування (майже білий колір, мінімальний радіус пучка прямує до нуля) поблизу областей, де фокусна відстань F змінює свій знак. Штрихування тут також показує область дефокусування, усі параметри такі ж, як на Рис. 4.2).

Нарешті, дослідимо роль нелінійності в цій задачі. Як вже було сказано, здатність пластини ШНП фокусувати лазерний ТГц пучок пов'язана з нелінійністю рівнянь для хвильового поля. А отже, це означає, що параметри фокусування залежать від амплітуди E_i падаючої хвилі. Ці залежності при фіксованих частотах (тобто фіксованому параметрі β) продемонстровано на рисунках 4.4 та 4.5. Інші параметри на цих рисунках такі ж, як на Рис. 4.2.

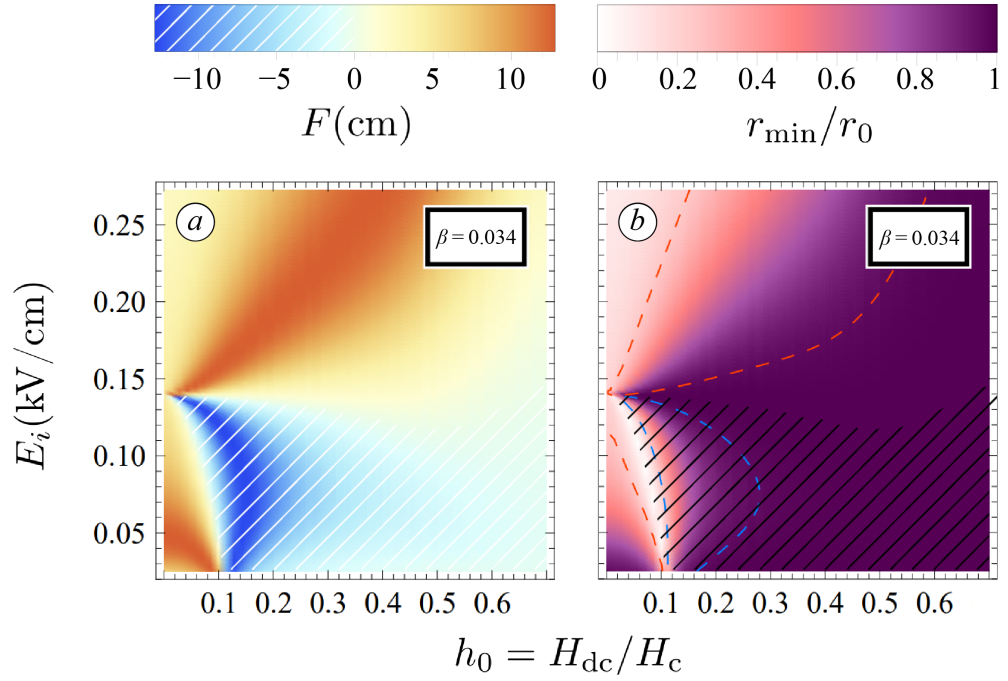


Рис. 4.5 Залежності фокусної відстані F та ефективності фокусування r_{\min}/r_0 від амплітуди E_i падаючої хвилі та величини постійного магнітного поля H_{dc} при $\beta = 0.034$.

Отже, досліджувані параметри фокусування можуть бути налаштовані:

- а) частотою,
- б) амплітудою падаючого поля,
- в) статичним магнітним полем.

Варіант а) потребує дуже високої точності налаштування частоти і це може бути складно реалізувати; варіант б) виникає завдяки нелінійності хвильового поля і не потребує такої точності (див. Рис. 4.4 та 4.5); варіант в) виникає завдяки взаємодії статичного магнітного поля з ЕМ хвилею і дає дуже широкі можливості налаштування (в тому числі і дефокусування).

Крім того, магнітне поле є *зовнішнім* параметром, тобто, якщо

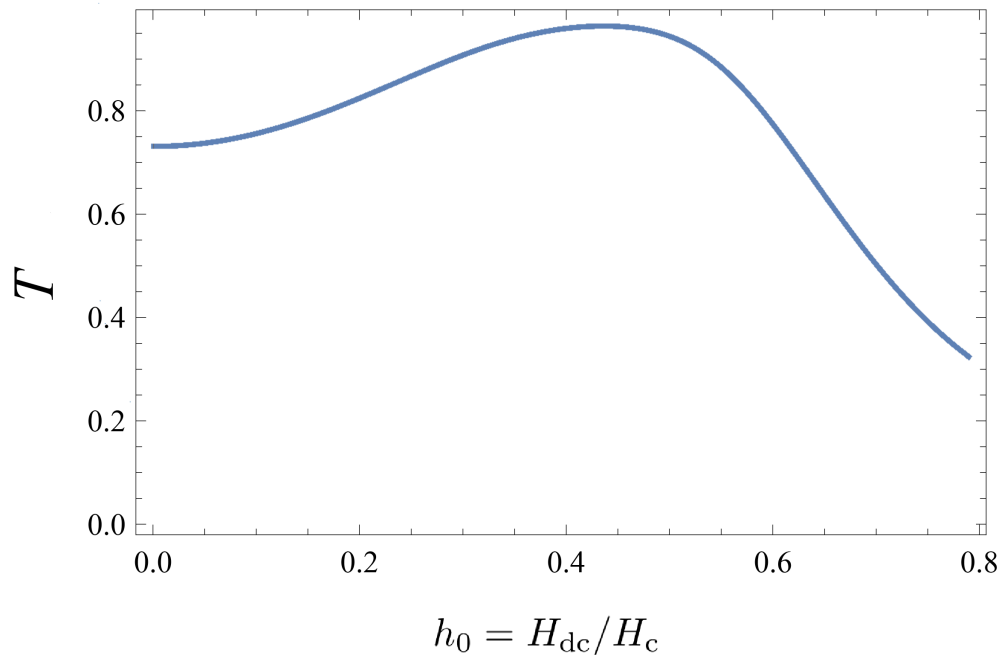


Рис. 4.6 Крива залежності коефіцієнта пропускання від магнітного поля.

завдання полягає в тому, щоб сфокусувати ТГц промінь певної заданої частоти та амплітуди, зміна зовнішнього магнітного поля стає зручним способом досягнення цього. Більше того, як продемонстровано на Рис. 4.4 та 4.5, методи б) і в) можна комбінувати, тобто налаштовувати фокусування як статичним магнітним полем, так і амплітудою падаючого поля одночасно.

На Рис. 4.6 зображено характерну криву пропускання $T(h_0)$, обчислену за формулою (Б.2) при $\beta = 0,047$ (інші параметри такі ж, як на Рис. 4.2). Видно, що коефіцієнт пропускання є доволі високим, близьким до 1. Це добре пропускання в порівнянні з типовими значеннями коефіцієнта T від 0,5 до 0,8 для тефлонових та силіконових лінз, що працюють в ТГц діапазоні [80].

4.4 Верифікація результатів чисельною симуляцією

При отриманні аналітичних результатів, представлених в цьому розділі, було зроблено багато припущень. Тому ми провели чисельну симуляцію проходження пучка крізь пластину ШНП і порівняли результати для параметрів фокусування, отримані за допомогою симулювання та аналітично.

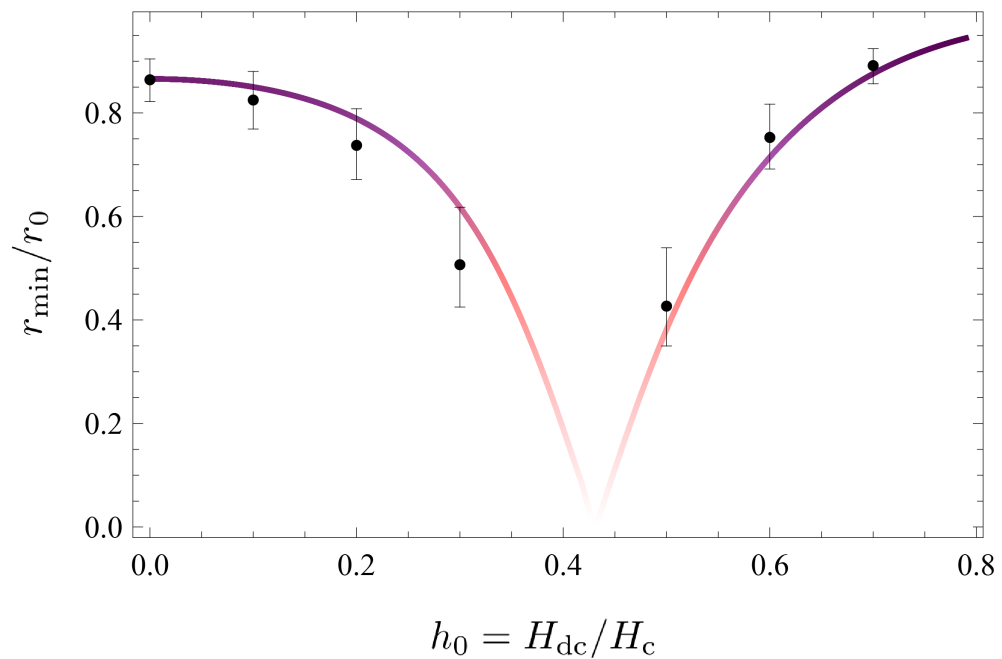


Рис. 4.7 Порівняння залежності мінімального радіуса пучка від постійного магнітного поля, отриманої за аналітичними формулами, та результатів чисельної симуляції (показано чорними точками); усі параметри такі ж, як на Рис. 4.6.

Моделювання полягало в чисельному розв'язанні СРГ (1.2) методом Ейлера для різниці фаз φ як функції координат x , y , z і часу t всередині пластини ШНП. При моделюванні розміри зразка по осях y та z були

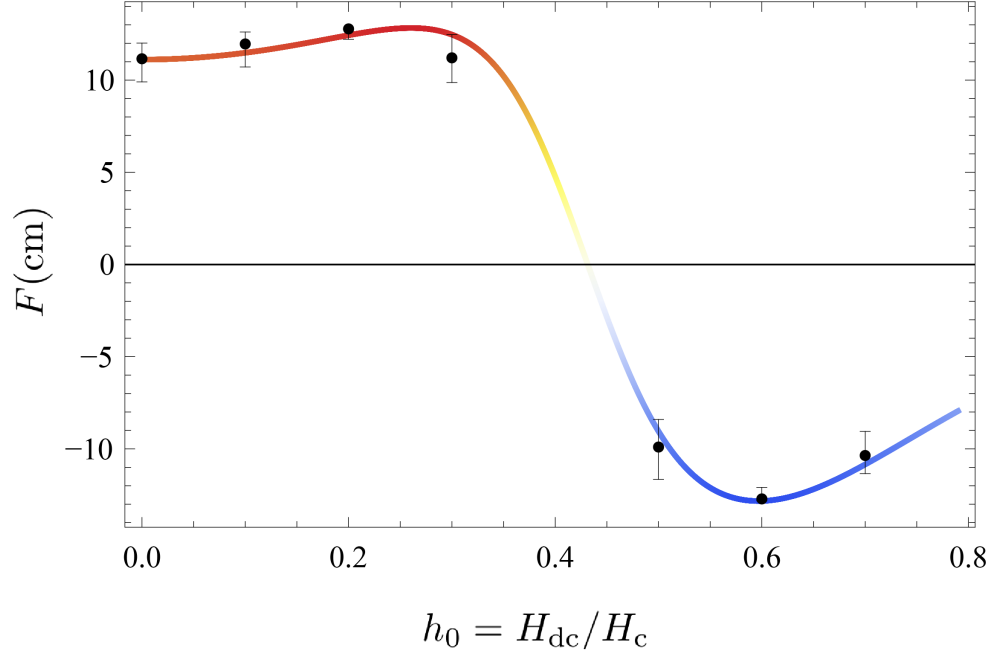


Рис. 4.8 Порівняння залежності фокусної відстані F від постійного магнітного поля, отриманої за аналітичними формулами, та результатів чисельної симуляції (показано чорними точками); усі параметри такі ж, як на Рис. 4.6.

обрані такими, щоб вони в $N = 3$ рази перевищували максимальний діаметр пучка. Було показано, що при таких розмірах крайовими ефектами можна знехтувати, адже поле на краях зразка було в $\exp(N^2) \sim 10^4$ разів слабшим, ніж в центрі пучка [17]. Моделювання було проведено декілька раз для декількох значень поля H_{dc} . Результати цього моделювання наведено на рисунках 4.8 і 4.7 в порівнянні з кривими, отриманими аналітично. Видно, що чисельні і аналітичні результати досить непогано узгоджені.

Для достатньо великих β , симуляція також підтверджує більшу точність рівнянь (Б.1) — наведених в додатку уточнених рівнянь, що пов'язують амплітуди поля в пластині з амплітудою падаючого поля, — в

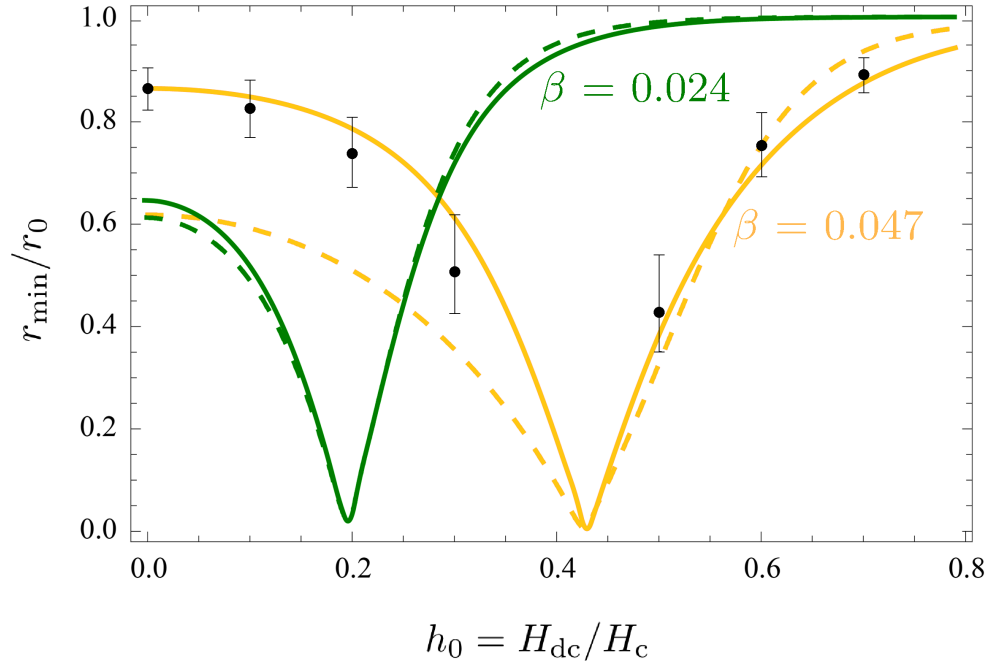


Рис. 4.9 Порівняння ефективності фокусування, отриманої за допомогою спрощеного (4.21), (4.22) (штрихові лінії) та уточненого (Б.1) (суцільні лінії) виразів для ГУ; $\beta = 0,047$ та $\beta = 0,024$ для жовтих та темно-зелених кривих, відповідно, інші параметри такі ж, як на Рис. 4.2.

порівнянні з простішими, і, відповідно, більш зручними для аналітичних оцінок рівняннями (4.21), (4.22). Відхилення між рівняннями (Б.1) і (4.21), (4.22) є незначним для малих β , див. Рис. 4.9, де темно-зелені суцільні та штрихові лінії ($\beta = 0,024$) майже співпадають. Тобто для дуже малих параметрів β , можна використовувати простіші рівняння (4.21), (4.22). Однак уточнені рівняння (Б.1) слід використовувати для більших β , див. жовті суцільні та штрихові лінії на Рис. 4.9 ($\beta = 0,047$), де суцільні лінії, нанесені на основі уточнених рівнянь, дають значно краще узгодження з чисельним моделюванням.

Висновки до розділу 4

1. В цьому розділі досліджено вплив статичного магнітного поля на нелінійне фокусування лазерного пучка гауссового профілю, зумовлене його проходженням через пластину ШНП. Це може бути більш актуальним в контексті сучасних експериментальних досліджень, ніж дослідження проходження плоских ЕМ хвиль, які зазвичай розглядаються в теоретичних роботах як простіша ідеалізована модель. Важливим для практичних застосувань висновком також є те, що коефіцієнт пропускання для такої надпровідникової ТГц лінзи виявляється відносно високим.
2. Показано, що статичне магнітне поле суттєво впливає на параметри фокусування пучка пластиною ШНП і тому може бути використано для гнучкого і відносно нескладного з експериментальної точки зору керування фокусуванням. Зміна величини постійного магнітного поля призводить до суттєвих змін параметрів фокусування. Зокрема, за відсутності статичного магнітного поля пластина може лише фокусувати ТГц випромінювання, тоді як його включення дозволяє отримати також і дефокусування. Фокусуючі властивості пластин ШНП майже періодично залежать від відстройки частоти хвилі від джозефсонівської плазмової частоти.
3. В процесі отримання аналітичних результатів було зроблено декілька припущень, які могли б суттєво вплинути на результати. Тому аналітичні результати, отримані в цьому розділі, було порівняно з результатами чисельної симуляції. Показано, що отримані аналітично залежності фокусної відстані та мінімального радіуса лазерного пучка, що пройшов через пластину ШНП, від величини статичного магнітного поля добре збігаються з результатами симуляції.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі проведено аналіз впливу зовнішнього статичного магнітного поля на проходження ТГц електромагнітних хвиль крізь пластини шаруватого надпровідника. Вперше було отримано такі результати:

1. Враховано ефект порушення електронейтральності шарів надпровідника в тонких пластинах ШНП в геометрії, коли шари надпровідника паралельні границям розділу пластина-вакуум. Отримано і проаналізовано закон дисперсії ЛХ для цього випадку і показано, що порушення електронейтральності може призводити до появи аномальної дисперсії хвиль в області частот, близьких до ДПЧ. Також, завдяки порушенню електронейтральності виникають і інші цікаві наслідки: поява додаткової забороненої зони на діаграмі частота-хвильове число та виродження спектру локалізованих хвиль. В рамках формалізму трансфер-матриць знайдено аналітично закон дисперсії ЛХ в тонких пластинах ШНП в геометрії, коли шари надпровідника перпендикулярні границі розділу пластини і вакууму за наявності зовнішнього постійного магнітного поля. Показано, що дисперсія ЛХ може бути аномальною, а також визначено, як саме можна налаштовувати закон дисперсії хвиль зміною зовнішнього магнітного поля.

2. Модифіковано метод трансфер-матриць для дослідження проходження ЕМ хвиль крізь пластину ШНП, поля яких описуються негармонічними спеціальними функціями Лежандра за наявності статичного магнітного поля. Отримано аналітично явні вирази для трансфер-матриць проходження через «хвіст» джозефсонівського вихору, що залежать лише від величини магнітного поля. Запропоновано використовувати ці нові матриці при обчисленні перетворень амплітуд плоскої хвилі при її про-

ходженні через складну систему, що включає одну або більше пластин ШНП.

3. Аналітично досліджено вплив статичного магнітного поля на резонансну прозорість пластин ШНП для терагерцової хвилі у геометрії Отто, тобто коли пластину поміщено в діелектричне середовище з шарами, перпендикулярними границі розділу, і відокремлено від цього середовища з обох боків тонкими просторовими проміжками вакууму. Показано, що за допомогою статичного магнітного поля можна отримувати три види можливих кривих залежності коефіцієнта пропускання від кута падіння: криву з одним нормальним гострим піком, криву з двома гострими піками та криву з одним розширеним піком. Останні дві специфічні форми виникають через аномальну дисперсію ЛХ.

4. Аналітично досліджено вплив статичного магнітного поля на фокусування лазерного пучка гаусового профілю, його фокусну відстань та мінімальний радіус пучка, що проходить крізь пластину ШНП. Показано, що статичне магнітне поле дозволяє отримати суттєво різні значення параметрів фокусування пучка. На відміну від випадку відсутності поля, коли пластина може лише фокусувати пучок, наявність магнітного поля дозволяє реалізовувати режими як фокусування, так і дефокусування. Аналітично отримані залежності параметрів фокусування від величини зовнішнього статичного магнітного поля підтверджено шляхом порівняння з результатами чисельної симуляції.

Практичне значення отриманих результатів визначається тим, що запропоновано використання статичного поля в якості засобу контролю для експериментального дослідження ефектів, пов'язаних з резонансною прозорістю пластини для плоских хвиль, а також для налаштування фокусування лазерного пучка пластиною ШНП замість змінювання частоти —

іншого параметра задачі, адже це є значно простішим в експериментальній реалізації. Отримані результати можуть бути використані для розробки приладів, що діють в терагерцовому діапазоні частот.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Rokhmanova T. N., Apostolov S., Maizelis Z., Yampol'skii V., Nori F. Superposition principle for nonlinear josephson plasma waves in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2014. Vol. 90. P. 184503.
2. Yampol'skii V., Slipchenko T. M., Mayzelis Z., Kadygrob D. V., Apostolov S., Savel'ev S. E., Nori F. Hysteretic jumps in the response of layered superconductors to electromagnetic fields. *Physical Review B*. 2008. Vol. 78, No. 18. P. 184504.
3. Apostolov S., Maizelis Z., Sorokina M. A., Yampol'skii V., Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82. P. 144521.
4. Savel'ev S., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Nori F. Terahertz josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Reports on Progress in Physics*. 2010. Vol. 73, No. 2. P. 026501.
5. Gong A., Qiu Y., Chen X., Zhao Z., Xia L., Shao Y. Biomedical applications of terahertz technology. *Applied Spectroscopy Reviews*. 2019. Vol. 55, No. 5. P. 418–438.
6. Salén P., Basini M., Bonetti S., Hebling J., Krasilnikov M., Nikitin A. Y. et al. Matter manipulation with extreme terahertz light: Progress in the enabling thz technology. *Physics Reports*. 2019. Vol. 836–837. P. 1–74.
7. Pawar A. Y., Sonawane D. D., Erande K. B., Derle D. V. Terahertz technology and its applications. *Drug Invention Today*. 2013. Vol. 5, No. 2. P. 157–163.
8. Apostolov S., Maizelis Z., Makarov N., Pérez-Rodríguez F., Rokhmanova T. N., Yampol'skii V. Transmission of terahertz waves through layered superconductors controlled by a dc magnetic field. *Physical Review B*. 2016. Vol. 94, No. 2. P. 24513.

9. Apostolov S., Makarov N., Yampol'skii V. Excitation of terahertz modes localized on a layered superconductor: Anomalous dispersion and resonant transmission. *Physical Review B*. 2018. Vol. 97, No. 2. P. 024510.
10. Ovcharenko H., Maizelis Z., Apostolov S., Yampol'skii V. Nonlinear focusing of terahertz laser beam using a layered superconductor. *Physical Review B*. 2022. Vol. 106, No. 17. P. 174511.
11. Kvitka N., Apostolov S., Makarov N., Rokhmanova T., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Resonant transparency of a layered superconductor: Hyperbolic material in the terahertz range tuned by dc magnetic field. *Physical Review B*. 2021. Vol. 103, No. 10. P. 104512.
12. Rokhmanova T., Apostolov S., Kvitka N., Yampol'skii V. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temperature Physics*. 2018. Vol. 44, No. 6. P. 552–560.
13. Kvitka N., Rokhmanova T., Apostolov S. Modification of transfer-matrix method for electromagnetic waves in layered superconductor in presence of dc magnetic field. *The Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series "Physics"*. 2019. No. 31. P. 42–47.
14. Kvitka N., Apostolov S., Yampol'skii V. Effect of charge-neutrality breaking on localized terahertz waves in a plate of layered superconductor. 2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW). IEEE, 2022. P. 392–395.
15. Kvitka N., Apostolov S., Rokhmanova T., Yampol'skii V. Resonant suppression of the thz wave reflection from a plate of layered superconducting metamaterial tunable by dc magnetic field. 2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials). IEEE, 2021. P. 214–216.
16. Квітка Н., Апостолов С.С., Рохманова Т. Резонансне пропускання ТГц-хвилі через шаруватий надпровідник, кероване зовнішнім ма-

- гнітним полем постійного струму. 2020 XX Всеукраїнська школа-семинар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини. Інститут фізики конденсованих систем НАН України, 2020. Р. 27.
17. Kvitka N., Ovcharenko H., Maizelis Z., Apostolov S., Yampol'skii V. Laser beam focusing by layered superconductor tuned by dc magnetic field. arXiv, 2024.
 18. Rokhmanova T., Apostolov S., N Kvitka N., Yampol'skii V. Description of localized josephson plasma waves: Legendre functions vs wkb approximation. 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). IEEE, 2018. P. 181–184.
 19. Rokhmanova T., Apostolov S., N Kvitka N., Yampol'skii V. Dispersion of thz modes localized on layered superconductor controlled by dc magnetic field. 2018 48th European Microwave Conference (EuMC). IEEE, 2018. P. 1509–1512.
 20. Rokhmanova T., Apostolov S., N Kvitka N., Yampol'skii V. Controlled surface terahertz plasmonics in layered superconductors. Complex Quantum Systems Out of Equilibrium. Murcia, Spain, 2019. P. 16.
 21. N Kvitka N., Rokhmanova T., Apostolov S., Yampol'skii V. Localized josephson plasma waves in a plate of layered superconductor in the presence of a dc magnetic field. X International Conference for Professionals and Young Scientists “LOW TEMPERATURE PHYSICS” in memory of B.Verkin for his 100th birthday anniversary. Kharkiv, Ukraine, 2019. P. 48.
 22. Kvitka N., Apostolov S., Rokhmanova T. Resonant thz wave transmission through a slab of a layered superconductor tuned by an external dc magnetic field. International Scientific Conference “Physical Phenomena in Solids”. Kharkiv, Ukraine, 2019. P. 26.
 23. Апостолов С. С. Електромагнітний та електронний транспорт у

- надпровідних структурах: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук : 01.04.02. Харків, 2019, 335 с.
24. Kleiner R., Steinmeyer F., Kunkel G., Müller P. Intrinsic josephson effects in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single crystals. *Physical Review Letters*. 1992. Vol. 68, No. 15. P. 2394–2397.
 25. Endo K., Sato H., Yamamoto K., Mizukoshi T., Yoshizawa T., Abe K. et al. Fabrication of intrinsic josephson junctions on bscco superconducting films grown by mocvd. *Physica C: Superconductivity*. 2002. Vol. 372–376. P. 1075–1077.
 26. Kawae T., Nagao M., Takano Y., Wang H. B., Hatano T., Yamashita T. Detailed characterization for ybco intrinsic josephson junctions by using small-sized junctions. *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2005. Vol. 426–431. P. 1479–1483.
 27. Laplace Y., Fernandez-Pena S., Gariglio S., Triscone J. M., Cavalleri A. Proposed cavity josephson plasmonics with complex-oxide heterostructures. *Phys. Rev. B*. 2016. Vol. 93. P. 075152.
 28. Hu X., Lin S.-Z. Phase dynamics in a stack of inductively coupled intrinsic josephson junctions and terahertz electromagnetic radiation. *Superconductor Science and Technology*. 2010. Vol. 23, No. 5. P. 053001.
 29. Laplace Y., Cavalleri A. Josephson plasmonics in layered superconductors. *Advances in Physics: X*. 2016. Vol. 1, No. 3. P. 387–411.
 30. Tachiki M., Machida M. Current understanding of josephson plasma theory and experiments in htsc. *Physica C: Superconductivity*. 2000. Vol. 341–348. P. 1493–1498.
 31. Michael M. H., von Hoegen A., Fechner M., Först M., Cavalleri A., Demler E. Parametric resonance of josephson plasma waves: A theory for optically amplified interlayer superconductivity in ybco. *Physical Review B*. 2020. Vol. 102, No. 17. P. 174505.

32. Welp U., Kadowaki K., Kleiner R. Superconducting emitters of thz radiation. *Nature Photonics*. 2013. Vol. 7, No. 9. P. 702–710.
33. An D. Y., Yuan J., Kinev N., Li M. Y., Huang Y., Ji M. et al. Terahertz emission and detection both based on high-*tc* superconductors: Towards an integrated receiver. *Applied Physics Letters*. 2013. Vol. 102, No. 9. P. 092601.
34. Savel'ev S., Yampol'skii V., Nori F. Thz detectors using surface josephson plasma waves in layered superconductors. *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2006. Vol. 445–448. P. 183–185.
35. Dienst A., Casandruc E., Fausti D., Zhang L., Eckstein M., Hoffmann M. et al. Optical excitation of josephson plasma solitons in a cuprate superconductor. *Nature Materials*. 2013. Vol. 12, No. 6. P. 535–541.
36. Yan Z., Zhu L.-G., Meng K., Huang W., Shi Q. Thz medical imaging: from in vitro to in vivo. *Trends in Biotechnology*. 2022. Vol. 40, No. 7. P. 816–830.
37. Cong M., Li W., Liu Y., Bi J., Wang X., Yang X. et al. Biomedical application of terahertz imaging technology: a narrative review. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*. 2023. Vol. 13, No. 12. P. 8768–8786.
38. Perkowitz S. Navigating the terahertz gap. *Physics World*. 2020. Vol. 33, No. 3. P. 37–40.
39. Mehdi I. Thz applications: Devices to space system. *Fundamentals of Terahertz Devices and Applications*. 2021. P. 511–545.
40. Hannachi E., Slimani Y. RF and Microwave Applications of High Temperature Superconductors. *Superconducting Materials*. Springer Nature Singapore, 2022. P. 373–399.
41. Miyamoto M., Kobayashi R., Kuwano G., Tsujimoto M., Kakeya I. Wide-band frequency modulation of a terahertz intrinsic josephson junction emitter of a cuprate superconductor. *Nature Photonics*. 2024. P. 10.1038.
42. Delfanazari K., Klemm R. A., Joyce H. J., Ritchie D. A., Kadowaki K.

- Integrated, portable, tunable, and coherent terahertz sources and sensitive detectors based on layered superconductors. *Proceedings of the IEEE*. 2020. Vol. 108, No. 5. P. 721–734.
43. Kashiwagi T., Nakade K., Saiwai Y., Minami H., Kitamura T., Watanabe C. et al. Computed tomography image using sub-terahertz waves generated from a high- T_c superconducting intrinsic josephson junction oscillator. *Applied Physics Letters*. 2014. Vol. 104, No. 8. P. 082603.
 44. Tsujimoto M., Doi T., Kuwano G., Elarabi A., Kakeya I. Engineering and characterization of a packaged high- T_c superconducting terahertz source module. *Superconductor Science and Technology*. 2017. Vol. 30, No. 6. P. 064001.
 45. Apostolov S., Maizelis Z., Sorokina M. A., Yampol'skii V., Nori F. Self-induced tunable transparency in layered superconductors. *Physical Review B*. 2010. Vol. 82, No. 14. P. 144521.
 46. Haque S. R. U., Michael M. H., Zhu J., Zhang Y., Windgätter L., Latini S. et al. Terahertz parametric amplification as a reporter of exciton condensate dynamics. *Nature Materials*. 2024.
 47. Dienst A., Hoffmann M., Fausti D., Pyon S., Takayama T., Takagi H., Cavalleri A. Nonlinear josephson effect in high- T_c cuprates. International Conference on Ultrafast Phenomena. Optica Publishing Group, 2010. P. ME47.
 48. Guo R., Duan S., He Z., Liang X., Niu Z., He M. et al. Josephson plasmon resonance in $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ high-temperature superconductor tunable terahertz metamaterials. *Advanced Functional Materials*. 2021. Vol. 31, No. 52. P. 2106891.
 49. Yampol'skii V., Gulevich D. R., Savel'ev S., Nori F. Surface plasma waves across the layers of intrinsic josephson junctions. *Physical Review B*. 2008. Vol. 78, No. 5. P. 054502.

50. Rajasekaran S., Casandruc E., Laplace Y., Nicoletti D., Gu G. D., Clark S. R. et al. Parametric amplification of a superconducting plasma wave. *Nature Physics*. 2016. Vol. 12, No. 11. P. 1012–1016.
51. Smolyaninov I. I. World Scientific Handbook of Metamaterials and Plasmonics: (In 4 Volumes). World Scientific. Vol. 1: Electromagnetic Metamaterials. P. 87–138.
52. Rakhmanov A. L., Yampol'skii V., Fan J. A., Capasso F., Nori F. Layered superconductors as negative-refractive-index metamaterials. *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81. P. 075101.
53. Huo P., Zhang S., Liang Y., Lu Y., Xu T. Hyperbolic metamaterials and metasurfaces: Fundamentals and applications. *Advanced Optical Materials*. 2019. Vol. 7, No. 14. P. 201801616.
54. Azmoudeh E., Farazi S. Ultrafast and low power all-optical switching in the mid-infrared region based on nonlinear highly doped semiconductor hyperbolic metamaterials. *Optics Express*. 2021. Vol. 29, No. 9. P. 13504.
55. Guo Z., Jiang H., Chen H. Hyperbolic metamaterials: From dispersion manipulation to applications. *Journal of Applied Physics*. 2020. Vol. 127, No. 7.
56. Cortes C. L., Newman W., Molesky S., Jacob Z. Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials. *Journal of Optics*. 2012. Vol. 14, No. 6. P. 063001.
57. Kumar A., Kumar N., Pandey G. N., Singh D., Thapa K. B. Metamaterial-plasma based hyperbolic material for sensor, detector and switching application at microwave region. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2020. Vol. 32, No. 32. P. 325701.
58. Takayama O., Lavrinenko A. V. Optics with hyperbolic materials. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2019. Vol. 36, No. 8. P. F38–F48.
59. Korzeb K., Gajc M., Pawlak D. A. Compendium of natural hyperbolic materials. *Opt. Express*. 2015. Vol. 23, No. 20. P. 25406–25424.

60. Edalati-Boostan S., Cocchi C., Draxl C. MoTe₂ as a natural hyperbolic material across the visible and the ultraviolet region. *Physical Review Materials*. 2020. Vol. 4, No. 8. P. 085202.
61. Sreekanth K. V., De Luca A., Strangi G. Negative refraction in graphene-based hyperbolic metamaterials. *Applied Physics Letters*. 2013. Vol. 103, No. 2. P. 023107.
62. Dai S., Ma Q., Liu M. K., Andersen T., Fei Z., Goldflam M. D. et al. Graphene on hexagonal boron nitride as a tunable hyperbolic metamaterial. *Nature Nanotechnology*. 2015. Vol. 10, No. 8. P. 682–686.
63. Dudek M., Kowerdziej R., Pianelli A., Parka J. Graphene-based tunable hyperbolic microcavity. *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, No. 1. P. 74.
64. Guo Y., Newman W., Cortes C. L., Jacob Z. Applications of hyperbolic metamaterial substrates. *Advances in OptoElectronics*. 2012. Vol. 2012. P. 1–9.
65. Xiang X., Yang C., Zhang Y., Peng Z., Cao Z., Zhao H. et al. Experimental realization of hyperbolic dispersion metamaterial for the whole visible spectrum based on liquid crystalline phase soft template. *Opt. Express*. 2015. Vol. 23, No. 16. P. 21343–21351.
66. Yin L.-Z., Han F.-Y., Zhao J., Wang D., Huang T.-J., Liu P.-K. Constructing hyperbolic metamaterials with arbitrary medium. *ACS Photonics*. 2021. Vol. 8, No. 4. P. 1085–1096.
67. Huang D., Poutrina E., Smith D. R. Analysis of the power dependent tuning of a varactor-loaded metamaterial at microwave frequencies. *Applied Physics Letters*. 2010. Vol. 96, No. 10. P. 104104.
68. Prayakarao S., Mendoza B., Devine A., Kyaw C., van Dover R. B., Liberman V., Noginov M. A. Tunable VO_2/Au hyperbolic metamaterial. *Applied Physics Letters*. 2016. Vol. 109, No. 6. P. 061105.
69. Ozbey B., Aktas O. Continuously tunable terahertz metamaterial employing magnetically actuated cantilevers. *Optics Express*. 2011.

- Vol. 19, No. 7. P. 5741.
70. Appavoo K., Haglund R. F. Detecting nanoscale size dependence in vo2 phase transition using a split-ring resonator metamaterial. *Nano Letters*. 2011. Vol. 11, No. 3. P. 1025–1031.
 71. Krishnamoorthy H. N. S., Zhou Y., Ramanathan S., Narimanov E., Menon V. M. Tunable hyperbolic metamaterials utilizing phase change heterostructures. *Applied Physics Letters*. 2014. Vol. 104, No. 12. P. 121101.
 72. Shoei M., Moravvej-Farshi M. K., Yousefi L. All-optical switching of nonlinear hyperbolic metamaterials in visible and near-infrared regions. *Journal of the Optical Society of America B*. 2015. Vol. 32, No. 11. P. 2358.
 73. Wang L., Tóth G., Hebling J., Kärtner F. Tilted-pulse-front schemes for terahertz generation. *Laser & Photonics Reviews*. 2020. Vol. 14, No. 7. P. 2000021.
 74. Hebling J., Yeh K.-L., Hoffmann M. C., Bartal B., Nelson K. A. Generation of high-power terahertz pulses by tilted-pulse-front excitation and their application possibilities. *Journal of the Optical Society of America B*. 2008. Vol. 25, No. 7. P. B6.
 75. Hafez H. A., Chai X., Ibrahim A., Mondal S., Férachou D., Ropagnol X., Ozaki T. Intense terahertz radiation and their applications. *Journal of Optics*. 2016. Vol. 18, No. 9. P. 093004.
 76. Maki K., Otani C. Terahertz beam steering and frequency tuning by using the spatial dispersion of ultrafast laser pulses. *Opt. Express*. 2008. Vol. 16, No. 14. P. 10158–10169.
 77. Weiss C., Torosyan G., Meyn J.-P., Wallenstein R., Beigang R., Avetisyan Y. Tuning characteristics of narrowband thz radiation generated via optical rectification in periodically poled lithium niobate. *Opt. Express*. 2001. Vol. 8, No. 9. P. 497–502.

78. Monnai Y., Altmann K., Jansen C., Hillmer H., Koch M., Shinoda H. Terahertz beam steering and variable focusing using programmable diffraction gratings. *Opt. Express*. 2013. Vol. 21, No. 2. P. 2347–2354.
79. Busch S., Scherger B., Scheller M., Koch M. Optically controlled terahertz beam steering and imaging. *Opt. Lett.* 2012. Vol. 37, No. 8. P. 1391–1393.
80. Mendis R., Nagai M., Wang Y., Karl N., Mittleman D. M. Terahertz artificial dielectric lens. *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, No. 1. P. 23023.
81. Savel'ev S., Yampol'skii V. A., Rakhmanov A. L., Nori F. Terahertz josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena. *Reports on Progress in Physics*. 2010. Vol. 73, No. 2. P. 026501.
82. Malomed B. A. The sine-Gordon Model: General Background, Physical Motivations, Inverse Scattering, and Solitons. The sine-Gordon Model and its Applications. Springer International Publishing, 2014. P. 1–30.
83. Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F. Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices. *Journal of Applied Physics*. 1993. Vol. 73, No. 5. P. 2411–2418.
84. Bulaevskii L. N., Zamora M., Baeriswyl D., Beck H., Clem J. R. Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in josephson-coupled layered superconductors. *Physical Review B*. 1994. Vol. 50, No. 17. P. 12831–12834.
85. Koyama T., Tachiki M. I-v characteristics of josephson-coupled layered superconductors with longitudinal plasma excitations. *Physical Review B*. 1996. Vol. 54, No. 22. P. 16183–16191.
86. Machida M., Koyama T., Tanaka A., Tachiki M. Theory of the superconducting phase and charge dynamics in intrinsic josephson-junction systems: microscopic foundation for longitudinal josephson plasma and phenomenological dynamical equations. *Physica C: Superconductivity*. 2000. Vol. 331, No. 1. P. 85–96.

87. Helm C., Bulaevskii L. N. Optical properties of layered superconductors near the josephson plasma resonance. *Physical Review B*. 2002. Vol. 66, No. 9. P. 094514.
88. Kim J. H., Pokharel J. Collective josephson vortex dynamics in long josephson junction stacks. *Physica C: Superconductivity*. 2003. Vol. 384, No. 4. P. 425–436.
89. Khankina S. I., Yakovenko V. M., Yampol'skii V. Josephson plasma oscillations in confined layered superconductors. *Low Temperature Physics*. 2012. Vol. 38, No. 3. P. 193–198.
90. Bulaevskii L. N., Koshelev A. E. Radiation due to josephson oscillations in layered superconductors. *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99, No. 5.
91. Ozyuzer L., Koshelev A. E., Kurter C., Gopalsami N., Li Q., Tachiki M. et al. Emission of coherent thz radiation from superconductors. *Science*. 2007. Vol. 318, No. 5854. P. 1291–1293.
92. Mazanov M. V., Apostolov S., Maizelis Z., Makarov N., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Resonant absorption of terahertz waves in layered superconductors: Wood's anomalies and anomalous dispersion. *Physical Review B*. 2020. Vol. 101, No. 2. P. 024504.
93. Koshelev A. E., Aranson I. Dynamic structure selection and instabilities of driven josephson lattice in high-temperature superconductors. *Physical Review B*. 2001. Vol. 64, No. 17. P. 174508.
94. Latyshev Y. I., Koshelev A. E., Bulaevskii L. N. Probing quasiparticle dynamics in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ with a driven josephson vortex lattice. *Physical Review B*. 2003. Vol. 68, No. 13. P. 134504.
95. Shukrinov Y. M., Mahfouzi F. Influence of coupling parameter on current–voltage characteristics of intrinsic josephson junctions in high- T_c superconductors. *Physica C: Superconductivity and its Applications*. 2006. Vol. 434, No. 1. P. 6–12.
96. Savel'ev S., Yampol'skii V., Nori F. Surface josephson plasma waves in

- layered superconductors. *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 95, No. 18. P. 187002.
97. Slipchenko T. M., Kadygrob D. V., Bogdanis D., Yampol'skii V., Krokhin A. Surface and waveguide josephson plasma waves in slabs of layered superconductors. *Physical Review B*. 2011. Vol. 84, No. 22. P. 224512.
 98. Schmidt V. V., Ustinov A. V. The physics of superconductors / Ed. by Paul Muller. 1997 edition. Berlin, Germany: Springer, 1997. P. 376.
 99. Apostolov S., Kadigrob D., Maizelis Z., Rokhmanova T., Shmat'ko A., Yampol'skii V. Localized modes in the layered superconductor samples. *RADIOFIZIKA I ELEKTRONIKA*. 2018. Vol. 23, No. 4. P. 55–66.
 100. Born M., Wolf E. Principles of optics. 7 edition. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2019. P. 992.
 101. Maystre D. Theory of Wood's Anomalies. Springer Series in Optical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 39–83.
 102. Lee H.-T., Ji G.-S., Oh J.-Y., Seo C.-W., Kang B.-W., Kim K.-W., Park H.-R. Measuring complex refractive indices of a nanometer-thick superconducting film using terahertz time-domain spectroscopy with a 10 femtoseconds pulse laser. *Crystals*. 2021. Vol. 11, No. 6. P. 651.
 103. Vidal S., Degert J., Tondusson M., Freysz E., Oberlé J. Optimized terahertz generation via optical rectification in ZnTe crystals. *Journal of the Optical Society of America B*. 2013. Vol. 31, No. 1. P. 149.
 104. Dienst A., Hoffmann M. C., Fausti D., Petersen J. C., Pyon S., Takayama T. et al. Bi-directional ultrafast electric-field gating of interlayer charge transport in a cuprate superconductor. *Nature Photonics*. 2011. Vol. 5, No. 8. P. 485–488.
 105. Rajaraman R. Solitons and instantons. London, England: Elsevier Science, 1982. P. 426.
 106. Bosco L., Francki'e M., Scalari G., Beck M., Wacker A., Faist J.

- Thermoelectrically cooled thz quantum cascade laser operating up to 210k. *Applied Physics Letters*. 2019. P. 010601.
107. Chevalier P., Amirzhan A., Wang F., Piccardo M., Johnson S. G., Capasso F., Everitt H. O. Widely tunable compact terahertz gas lasers. *Science*. 2019. Vol. 366, No. 6467. P. 856–860.
 108. Wang F., Lee J., Phillips D. J., Holliday S. G., Chua S.-L., Bravo-Abad J. et al. A high-efficiency regime for gas-phase terahertz lasers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2018. Vol. 115, No. 26. P. 6614–6619.
 109. Angot A. Complements de mathematiques: a l'usage des ingenieurs de l'electrotechnique et des telecommunications. Paris, 1965. P. 864.
 110. Bateman H., Project B. M. Higher Transcendental Functions [Volumes I-III]. McGraw-Hill Book Company, 1953. P. 295.
 111. Markos P., Soukoulis C. M. The physics of superconductors. Berlin, Germany: Princeton University Press, 2008. P. 376.
 112. Wu Y.-L., Deng H., Yu H.-F., Xue G.-M., Tian Y., Li J. et al. Fabrication of al/alox/al josephson junctions and superconducting quantum circuits by shadow evaporation and a dynamic oxidation process. *Chinese Physics B*. 2013. Vol. 22, No. 6. P. 060309.
 113. Lu R., Elliot A. J., Wille L., Mao B., Han S., Wu J. Z. et al. Fabrication of Nb/Al₂O₃/Nb josephson junctions using in situ magnetron sputtering and atomic layer deposition. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2013. Vol. 23, No. 3. P. 1100705–1100705.
 114. Xie T., Edwards T. E. J., della Ventura N. M., Casari D., Huszár E., Fu L. et al. Synthesis of model al-al₂o₃ multilayer systems with monolayer oxide thickness control by circumventing native oxidation. *Thin Solid Films*. 2020. Vol. 711. P. 138287.
 115. Guenther B. D. Modern Optics. 2 edition. London, England: Oxford University Press, 2015. P. 464.

116. Simon D. S. A guided tour of light beams: From lasers to optical knots.
Iop Concise Physics, 2016. P. 138.

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації у періодичних наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз Scopus або Web of Science:

1. **N. Kvitka**, S.S. Apostolov, N. M. Makarov, T. Rokhmanova, A. A. Shmat'ko, V.A. Yampol'skii Resonant transparency of a layered superconductor: Hyperbolic material in the terahertz range tuned by dc magnetic field. *Phys. Rev. B* 2021. Vol. 103. P. 104512. DOI: 10.1103/PhysRevB.103.104512 (Q1 (2021))
2. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Effect of a dc magnetic field on the anomalous dispersion of localized Josephson plasma modes in layered superconductors. *Low Temp. Phys.* 2018. Vol. 44. P. 552–560. DOI: 10.1063/1.5037558 (Q3 (2018))

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації в інших періодичних наукових виданнях:

3. **N. Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov. Modification of transfer-matrix method for electromagnetic waves in layered superconductor in presence of dc magnetic field. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна. Серія «Фізика»*. 2019. Vol. 31. P. 42-47. DOI: 10.26565/2222-5617-2019-31-6 (Категорія Б (2019))

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

4. **N. Kvitka**, H.V. Ovcharenko, Z.A. Maizelis, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Laser beam focusing by layered superconductor tuned by DC magnetic field. *ArXiv*. 2024
5. **N. Kvitka**, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Effect of Charge-neutrality Breaking on Localized Terahertz Waves in a Plate of Layered Superconductor. *2022 IEEE 2nd Ukrainian Microwave Week (UkrMW)* (November 14 – 18). Ukraine, 2022, доповідь, приз за найкращу доповідь серед аспірантів та молодих вчених Р. 214-216.
6. **N. Kvitka**, S.S. Apostolov, T. Rokhmanova, V.A. Yampol'skii. Resonant Suppression of the THz Wave Reflection from a Plate of Layered Superconducting Metamaterial Tunable by DC Magnetic Field. *2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials)* (September 20-23). New York, USA, 2021, доповідь Р. 214-216.
7. **Н. Квітка**, С.С. Апостолов, Т. Рохманова. Резонансне пропускання ТГц-хвилі через шаруватий надпровідник, кероване зовнішнім магнітним полем постійного струму *2020 XX Всеукраїнська школа-семінар та Конкурс молодих вчених зі статистичної фізики та теорії конденсованої речовини* (Жовтень 15-16). Львів, Україна, доповідь, диплом з відзнакою Р. 27.
8. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Dispersion of THz Modes Localized on Layered Superconductor Controlled

by DC Magnetic Field. *2018 48th European Microwave Conference (EuMC)* (Sep. 25 - 27). Madrid, Spain, 2018 P. 1509-1512.

9. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Description of Localized Josephson Plasma Waves: Legendre Functions vs WKB Approximation. *2018 IEEE 17th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)* (2-5 July). Kyiv, Ukraine, 2018, P. 181-184.

10. T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, **N. Kvitka**, V.A. Yampol'skii. Controlled Surface Terahertz Plasmonics in Layered Superconductors. *Complex Quantum Systems Out of Equilibrium* (August 25-29) Murcia, Spain, 2019, P. 16.

11. **N. Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov, V.A. Yampol'skii. Localized josephson plasma waves in a plate of layered superconductor in the presence of a dc magnetic field. *X International Conference for Professionals and Young Scientists "LOW TEMPERATURE PHYSICS" in memory of B.Verkin for his 100th birthday anniversary* (June 3 - 7) Kharkiv, Ukraine, 2019, P. 48.

12. **N. Kvitka**, T. Rokhmanova, S.S. Apostolov. Resonant THZ wave transmission through a slab of a layered superconductor tuned by an external dc magnetic field. *International Scientific Conference "Physical Phenomena in Solids"* (December 3-5) Kharkiv, Ukraine, 2019, P. 26.

ДОДАТОК Б

УТОЧНЕНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ОПИСУ ПОШИРЕННЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА В ПЛАСТНАХ ШНП

1. Уточненні рівняння, які пов'язують амплітуди поля E_{\pm} в пластині з амплітудою E_0 :

$$\begin{aligned}
 E_+^2 \chi + 2E_+ H_+ + H_+^2/h_1 &= E_-^2 \chi + 2E_- H_- + H_-^2/h_1, \\
 \frac{h_1^2[\chi^2 + 4\varepsilon(\bar{\kappa}^2 - \tilde{\kappa}^2)] + 2h_1\varepsilon(\tilde{\kappa} - 3\bar{\kappa}) + \varepsilon^2(\bar{\kappa}^2 - \tilde{\kappa}^2)^2}{\csc^2[2\bar{\kappa}d/\lambda_c]} &- \\
 -4\bar{\kappa}\varepsilon h_1 \chi \left\{ \frac{h_0^2 [h_1 \chi + \varepsilon(\tilde{\kappa}^2 - \bar{\kappa}^2)]}{2\sqrt{h_1}\chi} \sin[4\bar{\kappa}d/\lambda_c] - \bar{\kappa} \right\} & \\
 = \frac{h_1^2 E_i^2}{H_c^2 E_-^2} \left[\chi + 2\sqrt{\varepsilon}(\bar{\kappa} + \tilde{\kappa}) + \frac{\varepsilon(\bar{\kappa} + \tilde{\kappa})^2}{h_1} \right], & \quad (\text{Б.1})
 \end{aligned}$$

де $h_1 = 1 - h_0^2$, $\varepsilon = \varepsilon_c$.

2. Коефіцієнт пропускання:

$$\begin{aligned}
 T = 8\chi^4 \bar{t}^2 \left\{ 4\chi^2 \tilde{t} (\bar{t}^2 - r) - 4\chi^2 \tilde{t}^3 + r^2 + 2r\bar{t}^2 + \bar{t}^4 + \tilde{t}^4 - \right. & \quad (\text{Б.2}) \\
 \left. \frac{\bar{t}^4 - 2\bar{t}^2([\tilde{t} - \chi^2]^2 + \chi^4 + 3r) + (\bar{t}^2 + r)([\tilde{t} - 2\chi^2]^2 + r)}{\sec[4\bar{\kappa}d/\lambda_c]} - \right. & \\
 -4\bar{t}\sqrt{r}(\bar{t}^2 + 2\chi^2\tilde{t} - \bar{t}^2 - r - 2\chi^4) \sin[4\bar{\kappa}d/\lambda_c] + 2r\bar{t}^2 + & \\
 \left. + 4\chi^4(\bar{t}^2 + \tilde{t}^2 + r) - 2\bar{t}^2\tilde{t}^2 \right\}^{-1}, &
 \end{aligned}$$

де $r = \chi^2(\chi - h_1)$, $\tilde{t} = \tilde{\kappa}\sqrt{\varepsilon} + h_1$, $\bar{t} = \bar{\kappa}\sqrt{\varepsilon}$.